ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Принцип Дирихле помогает при решении многих логических и комбинаторных задач. Обычно его формулируют так: если $n + 1$ зайцев живут в n домах, то найдется хотя бы один дом, в котором живут по крайней мере два зайца. Действительно, если бы в каждом доме жило бы не больше одного зайца, то всего зайцев было бы не больше n. (Ясно, что вывод надо формулировать очень точно, например, неверно говорить, что есть лишь один дом, в котором живут два зайца — таких домов может быть и несколько, ведь какие-то дома могут быть пустыми.)

Соображения такого типа часто бывают полезными.

Пример 1. Пять девочек съели шесть конфет (на части конфеты не делили). Докажите, что есть девочка, съевшая по крайней мере две конфеты.

Решение. Роль «домов» здесь играют девочки, а «зайцев» — конфеты. Еще раз повторим рассуждение: если бы такой, как сказано в условии, девочки не было, то каждая из девочек съела бы не более одной конфеты, но тогда 5 девочек вместе съели бы не более 5 конфет — противоречие.

Подобные рассуждения бывают и более сложными или требующими каких-то дополнительных соображений.

Пример 2. В классе 26 человек. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что в классе имеется по крайней мере три ученика, сделавшие одинаковое количество ошибок.

Решение. 25 учеников сделали от 0 до 11 ошибок — всего у них 12 возможностей. Но если в классе нет трех человек, сделавших одинаковое количество ошибок, то каждую из этих 12 возможностей осуществило не более двух человек, т. е. всего от 0 до 11 ошибок сделало 24 ученика — противоречие.

Пример 3. В строчку выписаны последовательные натуральные числа от 1 до $к$. Докажите, что найдется несколько чисел, стоящих рядом, сумма которых делится на $к$.

Решение. Будем рассматривать следующие числа: $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, ..., 1 + 2 + 3 + ... + k$. Всего $к$ чисел. Если хотя бы одно из них делится на $к$, то требуемое получено. Пусть каждое из чисел делится на $к$ лишь с ненулевым остатком, но существуют $к$ - 1 ненулевых остатков от деления на k. По принципу Дирихле по крайней мере два из рассматриваемых чисел имеют одинаковые остатки, но тогда их разность делится на $к$. Остается заметить, что разность двух чисел рассматриваемого вида является суммой нескольких подряд идущих натуральных чисел.

1. В ящике лежат красные и синие карандаши. Их вынимают из ящика в темноте. Какое наименьшее число карандашей надо вытащить, чтобы быть уверенным, что среди взятых обязательно есть карандаши одного цвета?

2. Вершины четырехугольника раскрашены в красный, синий или зеленый цвета. Докажите, что найдется диагональ или сторона, соединяющая вершины одного цвета.

3. В городе 5 *млн* жителей и 20 административных районов. Докажите, что имеется район, в котором проживает не менее 250 *тыс.* человек.

4. В классе 25 человек. Докажите, что найдется 7 учащихся, имеющих одинаковую четвертную оценку по алгебре.

5. Дано 15 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать:

а) два числа, имеющих одинаковые остатки от деления на 14;

б) два числа, разность которых делится на 14.

6. В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зеленых, 4 желтых. Карандаши вынимают из ящика в темноте. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы быть уверенным, что среди них:

а) есть четыре карандаша одного цвета;

б) есть хотя бы один карандаш каждого цвета;

в) есть не меньше шести синих?

7. Докажите, что в любой компании из шести человек есть двое, имеющих в этой компании одинаковое число знакомых.

8. В классе 25 человек. Ребята дежурят парами, причем для каждой пары, которую можно составить, существует день, когда она дежурит. Решено каждой паре дежурных вручать специальную эмблему. Изготовили эмблемы 500 различных типов. Докажите, что найдутся две пары дежурных, получивших одинаковую эмблему. Верно ли, что обязательно найдутся три такие пары?

9. В классе 25 человек, по успеваемости они отличники, «хорошисты» или «троечники». Каждый из ребят занимается одним из следующих видов спорта: волейболом, баскетболом, бегом или шахматами. Докажите, что в классе есть по крайней мере три человека, имеющих одинаковую успеваемость и одинаковые спортивные интересы.

10. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят друг напротив друга.

11. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

12. В клетках таблицы 3 х 3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, по всем столбцам и двум главным диагоналям равны.

13. Докажите, что найдутся два числа вида 2^n, где n — натуральное число, имеющие равные остатки от деления на число 1999.

14. Докажите, что найдутся два числа вида 3^n, где n — натуральное число, разность которых делится на 1999.

15. Докажите, что найдется число вида 199919991999...199900...0 (состоящее из нескольких групп цифр «1999» и приписанных в конце нескольких нулей), кратное числу 1998.