

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ¹

Дорогие ребята, вашему вниманию предлагаются тренировочные задачи, решение которых поможет вам лучше подготовиться к олимпиаде по математике. Для удобства задачи сгруппированы по темам и снабжены указаниями.

1. Арифметика

1.1. Нам обоим вместе 63 года. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько сейчас лет мне и сколько Вам?

Указание: обозначить Ваш настоящий возраст через y , а прежний через x . Составить систему уравнений и решить её. *Отв.* 36 и 27.

1.2. Двое учащихся – высокий и маленький – вышли одновременно из одного и того же дома в одну школу. У одного из них шаг был на 20% короче, чем у другого, но зато он успевал за то же время делать на 20% больше шагов, чем другой. Кто из них раньше пришел в школу?

Указание: принять шаг высокого за одну часть, тогда шаг низкого составит $\frac{4}{5}$ части. *Отв.* Низкий идет медленнее, значит придет в школу позднее.

1.3. Каково наибольшее число квартир в сто квартирном доме, у которых сумма цифр номера одинаковая?

Указание: номера квартир в доме принимают значения от 1 до 100, значит, сумма цифр номера квартиры изменяется от 1 до 18. В каждой десятке номеров сумма цифр различна, значит одинаковые суммы цифр могут иметь лишь номера квартир с различными цифрами десятков. *Отв.* 10.

1.4. Написать число 100: а) шестью одинаковыми цифрами, б) десятью различными значащими цифрами.

1.5. Написать число 9 десятью различными цифрами.

1.6. Что больше: а) 5^{300} или 3^{500} ? б) 2^{700} или 5^{300} ? в) 2^{300} или 3^{200} ?

Указание: привести степени к степеням с одинаковыми показателями, например под а) $5^{300} = 125^{100}$; $3^{500} = 243^{100}$, и сравнить.

2. Логические задачи

2.1. Можно ли выложить в цепь, следуя правилам игры все 28 костей домино так, чтобы а) на одном конце оказалась шестерка, а на другом пятёрка? б) на обоих концах была шестерка?

2.2. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Найти её четырьмя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее остальных.

2.3. Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве:

а) $AX^A = BAX$, б) $PII^I = ИЛИ$, в) $AA^H = АННА$, г) $КАК = B^K$.

2.4. Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое незнакомых друг с другом. (Задача Рамсея)

¹ Материал подготовлен к печати И.В. Карповой

3. Принцип Дирихле

3.1. Доказать, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Указание: рассмотреть систему различных остатков от деления целого числа на 5. Таких остатков будет всего пять, а по условию рассматривается шесть чисел.

3.2. Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них найдутся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n .

Указание: если a_1, a_2, \dots, a_n – данные числа, рассмотреть n сумм: a_1 ; $a_1 + a_2$; $a_1 + a_2 + a_3$; ...; $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Либо одна из этих сумм делится на n , либо ни одна не делится, но тогда найдутся две суммы, имеющие одинаковый остаток при делении на n .

3.3. В классе 33 ученика, сумма их возрастов составляет 430 лет. Справедливо ли утверждение, что найдутся в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

Указание: предположить противное.

3.4. Можно ли найти такие две (разные) степени числа 4, у которых а) последняя цифра одинакова? б) две последние цифры одинаковы? в) три последние цифры одинаковы?

Указание: доказать существование двух разных степеней числа 4, которые дают одинаковые остатки при делении на 10, 100 или 1000.

4. Задачи на делимость

4.1. Доказать, что сумма квадратов трех целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

Указание: по теореме о делении с остатком произвольное целое число m можно записать как $m = 8q + r$, где $r = 0, 1, 2, \dots, 7$. Выяснить какие остатки будет давать квадрат числа $8q + r$, и рассмотреть сумму трех таких квадратов.

4.2. Найти все такие натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить нуль.

Указание: записать исходное число в виде $10N + b$, где b – цифра единиц. Тогда по условию девятикратное число равно $100N + b$, поэтому $9(10N + b) = 100N + b$.

4.3. Найти наибольший общий делитель чисел $2n + 3$ и $n + 7$.

Указание: наибольший общий делитель двух чисел совпадает с НОД одного из этих чисел и их разности. НОД $2n + 3$ и $n + 7$ равен НОД $n + 7$ и $n - 4$, равен НОД $n - 4$ и 11.

4.4. Доказать, что дробь несократима $\frac{12n+1}{30n+2}$.

Указание: см. задачу 4.3.

4.5. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.

Указание: рассмотреть четыре последовательных натуральных числа $n - 1, n, n + 1, n + 2$. Найти чему равно их произведение, сложенное с единицей.

4.6. Числа p и $2p + 1$ простые и $p > 3$. Доказать, что число $4p + 1$ составное.

Указание: простое число p при делении на 3 может иметь остатки 1 или 2, т.е. $p = 3r + 1$ или $p = 3r + 2$. Найти чему будет равно число $2p + 1$, учесть, что оно тоже простое. Найти чему будет равно число $4p + 1$.

5. Геометрические задачи

5.1. В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

Указание: построить диагональ из вершины острого угла и на ней, как на диаметре построить окружность.

5.2. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведен перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный внутри треугольника, равен 3 см, а вне треугольника (до пересечения с продолжением другого катета) 9 см. Найти длину гипотенузы.

Указание: использовать подобие треугольников.

5.3. Доказать, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покрывают весь четырехугольник.

Указание: предположить противное – пусть внутри четырехугольника существует точка, не покрытая ни одним кругом. Рассмотреть углы с вершиной в этой точке и опирающиеся на стороны четырехугольника.

5.4. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей. Даны площади $S_1 = S_{\triangle AOD}$ и $S_2 = S_{\triangle BOC}$. Найти площадь трапеции.

Указание: учесть, что высота трапеции равна сумме высот треугольников, проведенных к сторонам AD и BC , тогда площадь трапеции есть полусумма оснований трапеции, умноженная на сумму высот треугольника. Далее воспользоваться подобием треугольников и свойством площадей подобных треугольников. *Отв.* $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

5.5. В треугольнике центр вписанной и описанной окружности совпадают. Доказать, что треугольник равносторонний.

Указание: рассмотреть стороны треугольника, как хорды описанной около него окружности.

6. Разные задачи

6.1. Доказать, что число $11\dots 11$ (восемьдесят одна единица) делится на 81.

Указание: представить число, как сумму девяти слагаемых, в каждом из которых первые девять цифр единицы, а остальные нули, вынести одинаковые сомножители 111111111 за скобки и доказать, что оба получившихся сомножителя делятся на 9.

6.2. Двое A и B играют в такую игру: поочередно называют целые положительные числа, причем игрок A называет число не большее 10, игрок B называет число, превышающее число, названное игроком A , но не более чем на 10 и т.д. Выигрывает тот, кто назовет число 100. Как должен играть A , чтобы заведомо выиграть?

6.3. Докажите, что число $11\dots1122\dots22$ (состоящее из 100 единиц и 100 двоек) есть произведение последовательных целых чисел.

Указание: см. указание к задаче 6.1.

6.4. a и b целые положительные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

- 1) $a + 1$ делится на b ;
- 2) a равно $2b + 5$;
- 3) $a + b$ делится на 3;
- 4) $a + 7b$ – простое число;

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары a, b .

Указание: выяснить сначала, какие из перечисленных утверждений истины.

6.5. Найти натуральное число A , если из трёх следующих утверждений два верны, а одно – неверно:

- 1) $A + 51$ есть точный квадрат;
- 2) Последняя цифра числа A есть единица;
- 3) $A - 38$ есть точный квадрат.

6.6. Доказать, что из любых 5 целых чисел можно найти 3, сумма которых делится на 3.

6.7. Доказать, что если каждое из двух чисел есть сумма квадратов двух целых чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов.

Указание: если $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, найти их произведение.

6.8. В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

Указание: предположить противное.