ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ СЛОЖНОСТИ
5-7 КЛАСС

Чётность-1. Чередование и разбиение на пары

Задача 1: За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.

Задача 2: На плоскости расположено 11 шестерёнок, соединенных в кольцо. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?

Задача 3: Шахматный конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Задача 4: Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно по одному разу?

Задача 5: Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

Задача 6: На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 1999 раз. Могут ли после этого все шайбы остаться на исходных местах?

Задача 7: На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Может ли он иметь длину 1999? А длину 2000?

Задача 8: Можно ли нарисовать 9-звенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Задача 9: Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90 каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

Задача 10: Все костяшки домино выложили в цепь по правилам. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков оказалось на другом?

Задача 11: Из набора домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд по правилам?

Задача 12: На доске 25×25 расставлено 25 шашек, причём их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

Задача 13: Пусть расположение шашек в предыдущей задаче симметрично относительно обоих диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

Чётность-2.

Задача 1: Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 1999?

Задача 2: Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

Задача 3: 98 спичек разложили в 19 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечётным числом?

Задача 4: Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала «Это обман!». Почему?

Задача 5: а) На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх? б) Тот же вопрос, если монет 20, а разрешается переворачивать по 19.

Задача 6: В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки « + » и « – " так, чтобы в результате получился 0?

Задача 7: Произведение 10 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Задача 8: В вершинах куба расставлены числа 1 и -1. Затем в центре каждой грани написали произведение всех чисел, стоящих в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 14 чисел равняться 0?

Задача 9: Народная дружина состоит из 100 человек. Каждый день они дежурят по трое. Может ли в некоторый момент оказаться, что каждый дежурил с каждым ровно один раз?

Чётность-3. Несколько задач посложнее

Задача 1: В квадрате 5×5 стоят числа 1 и -1. Вычислили все произведения этих чисел по строкам и по столбцам. Доказать, что сумма этих десяти чисел не равна нулю.

Задача 2: В вершинах n-угольника стоят числа 1 и -1. На каждой стороне написали произведение чисел на ее концах. Оказалось, что сумма чисел на сторонах равна нулю. Доказать, что а) n чётно; б) n делится на 4.

Задача 3: По кругу расставлены нули и единицы (и те, и другие присутствуют). Каждое число, у которого два соседа одинаковы, заменяют на 0, а остальные числа – на 1. Такую операцию проводят несколько раз. Могут ли все числа стать нулями, если их 13 штук? Могут ли все числа стать единицами, если их 14 штук?

Задача 4: Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

Задача 5: Петя купил общую тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Хулиган Вася вырвал 25 листов и сложил 50 написанных на них чисел. Мог ли он в сумме получить число 2000?

Задача 6: Имеется таблица 1999×2001. Известно, что произведение чисел в любой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

Задача 7: На доске написаны числа от 1 до 2001. Разрешается производить следующую операцию: стереть два соседних числа и на их месте записать модуль их разности. Может ли на доске остаться один 0?

Задача 8: Найти наибольшее значение, которое может принимать выражение $aek - afh + bfg - bdk + cdh - ceg$, если каждое из чисел a, b, c, d, e, f, g, h, k равно ± 1.

Задачи про часы

Задача 1: Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

Задача 2: Найдите угол между часовой и минутной стрелками а) в 9 часов 15 минут; б) в 14 часов 12 минут?

Задача 3: Когда угол между часовой и минутной стрелками часов больше а) в 13:45 или в 22:15; б) в 13:43 или в 22:17; в) через t минут после полудня или за t минут до полуночи?

Задача 4: Вася измерил транспортиром и записал в тетрадку углы между часовой и минутной стрелками сначала в 8:20, а потом в 9:25. После этого Петя забрал свой транспортир. Помогите Васе найти углы между стрелками в 10:30 и 11:35.

Задача 5: Сколько раз с 12:00 до 23:59 совпадают минутная и часовая стрелки часов?

Задача 6: На часах полдень. Когда часовая и минутная стрелки совпадут в следующий раз?

Задача 7: Укажите хотя бы один момент времени, отличный от 6:00 и 18:00, когда часовая и минутная стрелки правильно идущих часов направлены в противоположные стороны.

Задача 8: Когда Петя начал решать эту задачу, он заметил, что часовая и минутная стрелки его часов образуют прямой угол. Пока он решал ее, угол все время был тупым, а в тот момент, когда Петя закончил решение, угол снова стал прямым. Сколько времени Петя решал эту задачу?

Задача 9: Петя проснулся в восьмом часу утра и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и стрелкой звонка, показывающей на цифру 8. Через какое время должен прозвенеть будильник?

Задача 10: Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько продолжалась Колина прогулка?

Задача 11: Ученик начал решать задачу между 9 и 10 часами и закончил между 12 и 13 часами. Сколько времени он решал задачу, если за это время часовая и минутная стрелки часов поменялись местами?

Задача 12: Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки правильно идущих часов образуют угол в 30 градусов?

Задача 13: Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая минутная? (Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

Задача 14: В мире антиподов минутная стрелка часов идет с нормальной скоростью, но в противоположную сторону. Сколько раз за сутки стрелки антиподных часов а) совпадают; б) противоположны?

Задача 15: Сколько раз в сутки антиподные часы невозможно отличить от нормальных (если не знать, который час на самом деле)?

Задача 16: Правильно шедшие часы испортились. С 24 часов до часу они шли нормально. Затем каждый час часовая и минутная стрелка меняются скоростями. Найти угол между стрелками в 3:30.

Задача 17: По точному хронометру было установлено, что часовая и минутная стрелки равномерно идущих (но с неправильной скоростью!) часов совпадают через каждые 66 минут. На сколько минут в час спешат или отстают эти часы?

Задача 18: В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная – 24 оборота, причём, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная – 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления, которые встречаются и на итальянских часах, и на обычных. Сколько существует таких положений? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах).

Логика

Задача 1: В пяти корзинах А, Б, В, Г и Д лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3 и 4 сорта, в корзине В – 2 и 3, в корзине Г – 4 и 5, в корзине Д – 1 и 5. Занумеруйте корзины так, чтобы в первой корзине имелись яблоки 1 сорта (как минимум одно), во второй корзине – яблоки второго сорта и т.д.

Задача 2: Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В ходе следствия каждый из них сделал по два заявления. Браун: »Я не делал этого. Джонс не делал этого». Смит: «Я не делал этого. Это сделал Браун.» Джонс: «Браун не делал этого. Это сделал Смит.» Потом оказалось, что один из них дважды сказал правду, другой – дважды солгал, третий - раз сказал правду, раз солгал. Кто совершил преступление?

Задача 3: Один из пяти братьев испек маме пирог. Андрей сказал: «Это Витя или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба шутите». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой – нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав.» Мама знает, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Кто испек пирог?

Задача 4: Из утверждений «число а делится на 2», «число а делится на 4», «число а делится на 12», «число а делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое именно?

Задача 5: Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков высказали следующие прогнозы.

1) команда Д займет 1 место, команда В – 2;
2) команда А займет 2 место, Г – 4;
3) В – 3 место, Д – 5;
4) В – 1 место, Г – 4 место;
5) А – 2 место, В – 3.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая – нет. Какое место заняла каждая из команд?

Задача 6: В финал чемпионата Европы выходили две команды. До соревнований пять болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды: 1) Франции и Голландии; 2) Бельгии и Италии; 3) Бельгии и Франции; 4) Англии и Голландии; 5) Голландии и Италии. Один прогноз оказался полностью неверным, а в остальных была правильно названа только одна из команд-финалисток. Какие команды вышли в финал?

Задача 7: В забеге шести спортсменов Андрей отстал от Бориса и еще от двух спортсменов. Виктор финишировал после Дмитрия, но ранее Геннадия. Дмитрий опередил Бориса, но все же пришел после Евгения. Какое место занял каждый спортсмен ?

Логика. Метод логических квадратов

Задача 1: В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас блондин, другой – брюнет, а третий – рыжий, и при этом ни у одного из нас цвет не соответствует фамилии», – заметил черноволосый. «Ты совершенно прав», – сказал Белов. Определите цвет волос художника.

Задача 2: Три подруги были на выпускном балу в белом, красном и голубом платье. Их туфли были тех же трёх цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвета платьев и туфель у подруг.

Задача 3: Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на одной улице. Один из них – столяр, другой – маляр, третий – водопроводчик. Недавно маляр хотел попросить своего знакомого столяра сделать кое-что для своей квартиры, но ему сказали, что столяр работает в доме водопроводчика. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?

Задача 4: Три товарища – Владимир, Игорь и Сергей – окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь – не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь – не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

Задача 5: Познакомимся с тремя людьми: Алешиным, Беляевым и Белкиным. Один из них – архитектор, другой – бухгалтер, третий – археолог. Один живет в Белгороде, другой – в Брянске, третий в Астрахани. Требуется узнать, кто где живет и у кого какая профессия.

Белкин бывает в Белгороде лишь наездами и то весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в этом городе.

У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена.

Жена архитектора доводится Белкину младшей сестрой.

Задача 6: На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

Задача 7: За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова – Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?

Задача 8: Петр, Геннадий, Алексей и Владимир занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе. Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

Задача 9: Среди офицеров А, Б, В и Г – майор, капитан и два лейтенанта. А и один из лейтенантов – танкисты, Б и капитан – артиллеристы, А младше по званию, чем В. Определите род войск и звание каждого.

Задача 10: Корнеев, Докшин, Мареев и Скобелев – жители нашего города. Их профессии – пекарь, врач инженер и милиционер.

Корнеев и Докшин – соседи и всегда на работу ездят вместе

Докшин старше Мареева

Корнеев регулярно обыгрывает Скобелева в пинг-понг

Пекарь на работу всегда ходит пешком

Милиционер не живет рядом с врачом

Инженер и милиционер встречались единственный раз, когда милиционер оштрафовал инженера за нарушение правил уличного движения.

Милиционер старше врача и инженера

Определите, кто чем занимается.

Задача 11: Борисов, Кириллов, Данин и Савин – инженеры. Один из них – автомеханик, другой – химик, третий – строитель, четвертый – радиотехник.

Борисов, который обыгрывает в шахматы Данина, но проигрывает Савину, бегает на лыжах лучше того инженера, который моложе его, и ходит в театр вдвое чаще, чем тот инженер, который старше Корнилова.

Химик, который посещает театр вдвое чаще, чем автомеханик, не является ни самым молодым, ни самым пожилым из этой четверки.

Строитель, который бегает на лыжах хуже, чем радиотехник, как правило, проигрывает в шахматных сражениях автомеханику.

Самый пожилой из инженеров лучше всех играет в шахматы и чаще всех бывает в театре, а самый молодой лучше всех ходит на лыжах.

Назовите профессии каждого из этой четверки инженеров, если известно, что ни в спорте, ни в приверженности к театру среди них нет двух одинаковых,

Задача 12: Дина, Соня, Коля, Рома и Миша учатся в институте. Их фамилии - Бойченко, Карпенко, Лысенко, Савченко и Шевченко.

Мать Ромы умерла.

Родители Дины никогда не встречались с родителями Коли.

Студенты Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде.

Услышав, что родители Карпенко собираются поехать за город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле.

Отец и мать Лысенко - хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо очень довольны, что их дети собираются пожениться.

Установите имя и фамилию каждого из молодых людей и девушек.

Задача 13: В семье Семеновых 5 человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один – инженер, другой – юрист, третий – слесарь, четвертый – экономист, пятый – учитель. Вот что еще известно о них. Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь – хороший спортсмен. Он пошел по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Семеновых.

Задача 14: В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флеров преподают экономическую географию, английский язык, французский язык, немецкий язык, историю, математику.

Преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой.

Ильин Старше Флерова, но стаж работы у него меньше, чем у преподавателя экономической географии.

Будучи студентами, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Остальные окончили педагогический институт.

Флеров – отец преподавателя французского языка.

Преподаватель английского языка – самый старший из всех по возрасту и по стажу работы. Он работает в этом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории – его бывшие студенты.

Аркадьева старше преподавателя немецкого языка.

Кто какой предмет преподает?

Задача 15: Поездная бригада состоит из кондуктора, проводника, машиниста и помощника машиниста. Их зовут Андрей, Петр, Дмитрий и Трофим.

Дмитрий старше Андрея.

У кондуктора нет родственников в бригаде.

Машинист и помощник машиниста – братья. Других братьев у них нет.

Дмитрий – племянник Петра.

Помощник машиниста – не дядя проводника, а проводник – не дядя машиниста.

Кто в качестве кого работает? Какие родственные отношения существуют между членами бригады?

Задача 16: В междугороднем автобусе едут шесть пассажиров: Агеев, Боков, Власов, Громов, Дубов, Елисеев. Живут они в разных городах: в Москве, Ленинграде, Туле, Киеве, Риге и Одессе. Известно, что:

а) Агеев и москвич – врачи, Дубов и ленинградец – учителя, Власов и туляк – инженеры.

б) Боков и Елисеев – участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии никогда не служил.

в) рижанин старше Агеева, а одессит старше Власова. Боков и москвич выйдут в Киеве, а Власов и рижанин намерены выйти в Виннице.

Определите фамилию, профессию и место жительства каждого пассажира.

Конструкции. Можно или нельзя

Задача 1: Может ли в месяце быть 3; 4; 5; 6 воскресений?

Задача 2: Может ли в году быть 51; 52; 53; 54 воскресенья?

Задача 3: Может ли сумма цифр трёхзначного числа быть равной 22? А равной 28?

Задача 4: Может ли произведение цифр трёхзначного числа быть равно 22? 28? 350? 730?

Задача 5: Позавчера Васе было 11 лет, а в следующем году исполнится 14. Может ли такое быть?

Задача 6: Двое близнецов родились с интервалом в 10 минут. Когда спустя 7 лет они готовились идти в первый класс, их спросили, сколько им лет. «Мне вчера исполнилось семь», – гордо ответил один. «А мне семь исполнится только завтра», – признался второй. Как такое могло быть?

Задача 7: Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке – отрицательна?

Задача 8: Можно ли в таблицу 4×4 поставить числа -1, 0 и 1 так, чтобы все 8 сумм чисел в строках и столбцах были различными?

Задача 9: Можно ли в прямоугольной таблице расставить натуральные числа так, чтобы в каждом столбце сумма чисел была больше 100, а в каждой строке – меньше 5 ?

Задача 10: Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными а) 999? б) 1999?

Задача 11: Площадь прямоугольника меньше 1 кв.м. Может ли его периметр быть больше 1 км?

Задача 12: На балу было юношей и девушек поровну, было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

а) Могло ли получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

Задача 13: Сумма положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 1?

Задача 14: На занятии Вася, Леня и Стас решили все задачи. Может ли оказаться, что Стас большинство задач решил раньше Лени, Леня – большинство раньше Васи, а Вася – большинство раньше Стаса?

Задача 15: Фирма проработала год, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые два подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной.

а) Может ли суммарная прибыль за весь год быть положительной?

б) А за первые 11 месяцев?

Задача 16: В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Задача 17: Можно ли на шахматной доске расставить а) 9 ладей; б) 14 слонов так, чтобы они не били друг друга?

Задача 18: Какое наибольшее число ладей (слонов, королей, ферзей, коней) можно расставить на доске так, чтобы они не били друг друга?

Задача 19: У шахматной доски выпилены а) угловая клетка; б) две противоположные угловые клетки; в) две клетки разного цвета. Можно ли такую испорченную доску распилить на двуклеточные прямоугольники?

Задача 20: Из 4 одинаковых с виду монет одна фальшивая (легче настоящей). Можно ли наверняка найти ее за одно взвешивание на чашечных весах без гирь?

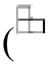
Задача 21: На сковороде могут одновременно жариться 2 котлеты. Каждую надо обжарить с обеих сторон, причём для обжаривания одной стороны требуются 2 минуты. Можно ли поджарить 3 котлеты быстрее, чем за 7 минут?

Задача 22: В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

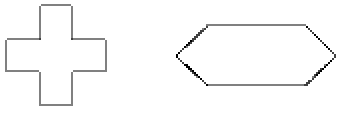
Разрезания и перекладывания

Задача 1: Как разрезать прямоугольник 4×9 на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

Задача 2: Дан круг и отмечена точка внутри него. На какое минимальное количество частей можно разрезать этот круг так, чтобы из получившихся частей можно было сложить круг, в котором отмеченная точка является центром.

Задача 3: Разрежьте уголок, составленный из трёх клеток (), на четыре равные по форме части.

Задача 4: С помощью разрезаний и перекладываний сделайте из фигуры «крест» фигуру «конфета» (см. рисунок).



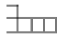
Задача 5: Разрежьте тетраминошку на пять частей и сложите из них два равных квадрата.

Задача 6: Сделайте из квадрата четыре равных прямоугольника и один квадрат

а) с помощью разрезаний и перекладываний;

b) с помощью только разрезаний.

Задача 7: а) Можно ли разрезать квадрат на 100 равных четырёхугольников, не являющихся прямоугольниками? б) Можно ли разрезать квадрат на 2000 равных треугольников?

Задача 8: Можно ли сложить квадрат из фигурок ? Фигурки можно брать в неограниченном количестве. А если длинная сторона уголка равна n клеткам?

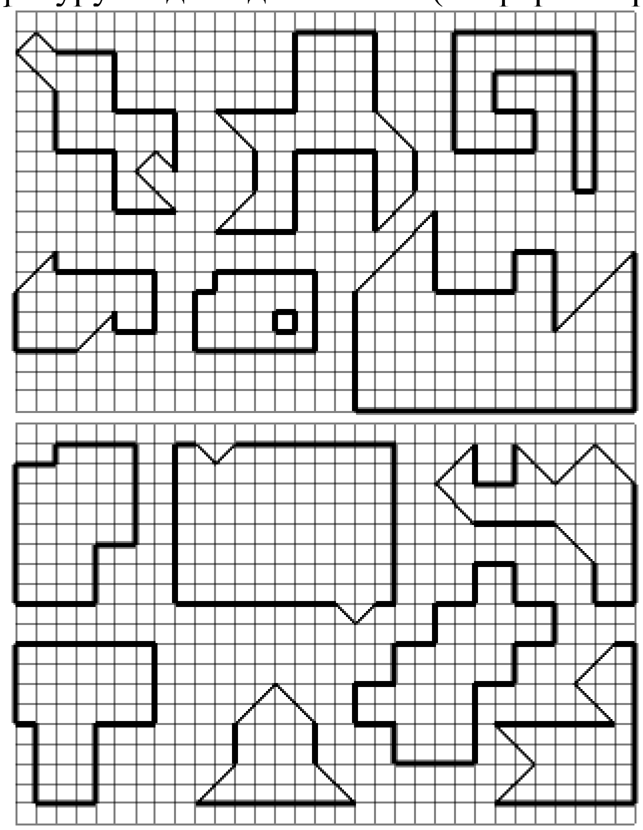
Задача 9: Можно ли замостить плоскость одинаковыми а) пятиугольниками; б) шестиугольниками; в) семиугольниками?

Задача 10: Разрежьте квадрат на два одинаковых а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) 2n-угольника; г) 2n + 1-угольника. Можно ли разрезать так прямоугольник? Для каких еще фигур годится этот алгоритм?

Задача 11: Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника а) какой-нибудь пятиугольник; б) правильный пятиугольник?

Задача 12:

На картинках приведены фигуры на клетчатой бумаге. Ваша задача – разрезать каждую фигуру на две одинаковых (по форме и размерам) части.



(Фигурку, похожую на ракету надо разбить на четыре одинаковые части)

Конструкции. Постепенное конструированиеЗадача 1:
а) Придумайте такие 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных; б) то же, но все числа больше 100; в) как в (а), но 4 числа; г) как в (а), но 10 чисел.

Задача 2: а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждые два имели общий делитель, больший 1, но при этом чтобы НОД всех трёх чисел был равен 1; б) то же, но все числа больше 100; в) как в (а), но 4 числа; г) как в (а), но 10 чисел.

Задача 3: Разрежьте квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) а) $n = 4$; б) $n = 7$; в) $n = 10$; г) $n = 1999$.

Задача 4: В мешке лежит 64 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 23 кг гвоздей?

Задача 5: Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

Задача 6: Докажите, что если ввести в обращение монеты достоинством в 5 и 26 копеек, то можно будет уплатить без сдачи любую сумму, начиная с 1 рубля.

Задача 7: Представьте число 1 в виде суммы а) трёх б) четырёх в) десяти различных дробей с числителем 1.

Задача 8: Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Задача 9: При каких натуральных n можно разрезать квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

Задача 10: Расставьте различные натуральные числа в таблицу 2×3 (2 строки, 3 столбца) так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

Задача 11: а) Может ли свеча внутри пустой многоугольной комнаты не освещать полностью ни одну из стен? б) Существует ли многоугольник и точка вне него, из которой ни одной стороны не видно полностью?

Задача 12: У входа в пещеру с сокровищами стоит бочка с 4 дырками по кругу в крышке. В каждой дырке можно нащупать селедку хвостом вверх или вниз. Али-Баба может просунуть руки в любые две дырки, определить положение селедок под ними и, если хочет, перевернуть одну или обе по своему усмотрению. Когда хвосты всех четырёх селедок окажутся направленными в одну сторону, дверь в пещеру откроется. Однако, после того, как Али-Баба вытаскивает руки, бочка некоторое время с дикой скоростью крутится, так что Али-Баба не может определить, куда именно он совал руки раньше. Как Али-Бабе открыть дверь не более чем за 10 засовываний?

Задача 13: Решите более сложную задачу о сокровищах: в бочке по кругу находится 8 дырок, а за один ход разрешается «тестировать» и при необходимости переворачивать любые четыре из них.

Задача 14: Докажите, что существуют 1000 подряд идущих составных чисел.

Задача 15: Найдите шесть последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 5, пятое – на 6, шестое – на 7. Обязательно ли число, следующее за шестым, будет делиться на 8?

Задача 16: Найдите шесть последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 2, второе – на 3, третье – на 5, четвертое – на 7, пятое – на 11, шестое – на 13.

РаскраскиЗадача 1: Можно ли выложить шахматную доску тридцатью двумя доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 – вертикально?

Задача 2: Можно ли выложить квадрат 8×8, используя 15 прямоугольников 1×4 и один уголок вида ?

Задача 3: Можно ли выложить прямоугольник 6×10 прямоугольниками 1×4?

Задача 4: Можно ли сложить квадрат 6×6 с помощью 11 прямоугольников 1×3 и одного уголка вида ?

Задача 5: На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки взлетают и приземляются на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом окажется хотя бы одна пустая клетка.

Задача 6: Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 3×1?

Задача 7: Фигура «верблюд» ходит по шахматной доске ходом типа (1, 3). Можно ли пройти ходом «верблюда» с произвольного поля на соседнее?

Задача 8: Можно ли доску размером 10×10 покрыть фигурами вида ?

Задача 9: Дана доска 12×12. В левом нижнем углу стоят 9 шашек, образуя квадрат 3×3. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтоб они образовали квадрат 3×3 в правом нижнем углу?

Задача 10: В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.

Задача 11: Замок имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найти наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

Задача 12: Дан куб $6 \times 6 \times 6$. Докажите, что его нельзя разбить на параллелепипеды $4 \times 1 \times 1$.

Задача 13: Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например «54, 55, 56, 57»; «44, 54, 64, 74»)

Указание: Попытайтесь закодировать эту задачу так, чтобы оправдать её наличие в теме «раскраски».

Задача 14: Докажите, что трёхзначные числа нельзя разбить на группы по 4 так, чтобы числа в каждой группе совпадали во всех разрядах кроме одного, а в оставшемся разряде цифры шли бы подряд.

Задача 1: От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась вдвое медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползет обратно? У какой из мух выше средняя скорость движения?

Задача 2: Двое одновременно отправились из А в В. Первый поехал на велосипеде, второй – на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути с автомобилем произошла авария, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в В?

Задача 3: Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 ч. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3 ч 10 минут, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч?

Задача 4: Из пункта А в пункт В выехал велосипедист. Одновременно из пункта В в пункт А на встречу велосипедисту вышел пешеход. После их встречи велосипедист повернул обратно, а пешеход продолжил свой путь. Известно, что велосипедист вернулся в пункт А на 30 минут раньше пешехода, при этом его скорость была в 5 раз больше скорости пешехода. Сколько времени затратил пешеход на путь из А в В?

Задача 5: Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Задача 6: Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Дворцового моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

Задача 7: Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. Сколько километров она пробежала?

Задача 8: Андрей ведет машину со скоростью 60 км/ч. Он хочет проезжать каждый километр на 1 минуту быстрее. На сколько ему следует увеличить скорость?

Задача 9: Турист шел 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/час?

Принцип Дирихле-1Задача 1: Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?

Задача 2: На складе есть 25 пар обуви 3 размеров. Докажите, что из них можно выбрать не менее 9 пар одного размера.

Задача 3: 20 школьников решали задачи. Один решил 18 задач, а остальные меньше. Доказать, что какие-то 2 школьника решили поровну задач.

Задача 4: В ящике лежит 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 жёлтых шарика. Сколько надо вынуть шариков, чтобы среди них наверняка нашлись

а) шарик каждого цвета;

б) не менее 4 шариков каждого цвета;

в) не менее 6 синих;

г) не менее 6 красных?

Задача 5: Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

Задача 6: Есть 82 кубика. Докажите, что из них найдется либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.

Задача 7: Придумайте аналогичную задачу, чтобы нашлось либо 20 разноцветных, либо 20 одноцветных кубиков. Каким наименьшим числом кубиков вам удастся обойтись? Попробуйте объяснить, почему это число действительно наименьшее.

Задача 8: Тиранозаврик Вася весь день вычислял степени двойки – его интересовало, найдутся ли такие две различных степени, что три их последние цифры совпадут. Помогите Васе.

Задача 9: Какого количества степеней двойки заведомо хватит тиранозаврику Васе, чтобы получить ответ на свой вопрос?

Задача 10: В стране Курзюпии есть M футбольных команд по 11 человек. Они все должны ехать на чемпионат страны. M-местный самолет сделал 10 рейсов, а еще один вертолет перевез M – 1 человека. Доказать, что хотя бы одна команда приехала на чемпионат в неполном составе.

Задача 11: Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Доказать, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

Задача 12: В каждой клетке таблицы записано число 1, 0 или -1. В каждой строке, столбце и диагонали считаем сумму всех стоящих там чисел. Могут ли все такие суммы быть различными?

Принцип Дирихле-1Задача 1: Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?

Задача 2: На складе есть 25 пар обуви 3 размеров. Докажите, что из них можно выбрать не менее 9 пар одного размера.

Задача 3: 20 школьников решали задачи. Один решил 18 задач, а остальные меньше. Доказать, что какие-то 2 школьника решили поровну задач.

Задача 4: В ящике лежит 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 жёлтых шарика. Сколько надо вынуть шариков, чтобы среди них наверняка нашлись

а) шарик каждого цвета;

б) не менее 4 шариков каждого цвета;

в) не менее 6 синих;

г) не менее 6 красных?

Задача 5: Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

Задача 6: Есть 82 кубика. Докажите, что из них найдется либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.

Задача 7: Придумайте аналогичную задачу, чтобы нашлось либо 20 разноцветных, либо 20 одноцветных кубиков. Каким наименьшим числом кубиков вам удастся обойтись? Попробуйте объяснить, почему это число действительно наименьшее.

Задача 8: Тиранозаврик Вася весь день вычислял степени двойки – его интересовало, найдутся ли такие две различных степени, что три их последние цифры совпадут. Помогите Васе.

Задача 9: Какого количества степеней двойки заведомо хватит тиранозаврику Васе, чтобы получить ответ на свой вопрос?

Задача 10: В стране Курзюпии есть М футбольных команд по 11 человек. Они все должны ехать на чемпионат страны. М-местный самолет сделал 10 рейсов, а еще один вертолет перевез $M-1$ человека. Доказать, что хотя бы одна команда приехала на чемпионат в неполном составе.

Задача 11: Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Доказать, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

Задача 12: В каждой клетке таблицы записано число 1, 0 или -1. В каждой строке, столбце и диагонали считаем сумму всех стоящих там чисел. Могут ли все такие суммы быть различными?

Принцип Дирихле-2. Сначала сосчитаемЗадача 1: Пятнадцать мальчиков собрали вместе 100 орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.

Задача 2: 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что двое послали открытки друг другу.

Задача 3: Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Задача 4: Числа 1, 2, …, 7 разбиты на две группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп меньше 72.

Задача 5: Цифры 1, 2, …, 9 разбили на 3 группы. Докажите, что произведение чисел в хотя бы одной группе меньше 72.

Задача 6: Докажите, что из любых 10 чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 10.

Задача 7: Докажите, что из 65 целых чисел всегда можно найти ровно 9 таких, сумма которых делится на 9.

Задача 8: Докажите, что из 65 целых чисел либо найдутся 9 таких, что каждое из чисел этой девятки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдется девять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.

Задача 9: Верно ли, что среди любых 34 разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых вдвое больше другого?

Задача 10: Докажите, что из 26 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Задача 11: Попробуйте обобщить предыдущую задачу, если вместо 50 в условии будет стоять произвольное чётное число 2N. (Какое число должно стоять вместо числа 26?)

Задача 12: Дано 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Рассматриваются всевозможные их попарные разности (из большего числа вычитают меньшее). Докажите, что среди них всегда найдутся четыре одинаковых.

Задача 13: В последовательности 2, 0, 0, 0, 2, 2, 4,…каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов. а) Встретятся ли в этой последовательности еще раз подряд 4 цифры 2, 0, 0, 0? б) Встретятся ли в ней четыре подряд цифры 0, 0, 8, 2 ?

Принцип Дирихле-3. Вокруг геометрииЗадача 1: В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка – точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 50 см можно закрыть не менее 13 дырок.

Задача 2: В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка – точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

Задача 3: В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать круг радиуса 12.5 см, в котором нет ни одной дырки.

Задача 4: Какое наибольшее число клеток можно закрасить на шахматной доске 8 × 8 так, чтобы в любом уголке из трёх клеток были как закрашенные, так и незакрашенные клетки?

Задача 5: На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трёх клеток .

Задача 6: В правильном 20-угольнике отметили 9 вершин. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

Задача 7: Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что существует отрезок, оба конца и середина которого окрашены в один цвет.

Задача 8: Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами.

Задача 9: Доска 6 × 6 заполнена костяшками домино 1 × 2. Докажите, что можно провести вертикальный или горизонтальный разрез доски, не пересекающий ни одной из костяшек.

Задача 10: Клетки прямоугольника 5 × 41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, что все 9 клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.

Задача 11: Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Принцип Дирихле-4. Заплаты на кафтане

Задача 1: Коридор длины 6 м покрыт тремя трёхметровыми ковровыми дорожками, причём нигде дорожки не лежат в три слоя. Докажите, что какие-то две из них перекрываются не меньше, чем на 1,5 м.

Задача 2: Окружность длины 6 м покрыта тремя трёхметровыми дугами, причём никакие три дуги не имеют общих точек. Докажите, что какая-то пара дуг имеет пересечение не меньше, чем 1 м.

Задача 3: В комнате площадью 6 кв.м постелены на полу три ковра площади 3 кв.м каждый. Верно ли, что какие-нибудь 2 из них пересекаются по площади, не меньшей 1 кв.м.?

Задача 4: В комнате площадью 6 кв.м постелены на полу три ковра площади S кв.м каждый. Известно, что S > 2. Докажите, что какие-нибудь 2 из них пересекаются по площади, не меньшей S – 2 кв.м.

Задача 5: В комнате площадью 6 кв.м на полу постелены 4 ковра площади 2 кв.м каждый. Верно ли, что какие-то два из них обязательно перекрываются по площади, не меньшей 1 кв.м?

Задача 6: Внутри квадрата со стороной 1 расположены 4 прямоугольника, площадь каждого из которых не менее 1/2. Докажите, что хотя бы два из них имеют общую часть площади не менее 1/6.

Задача 7: На кафтане площади 1 расположены 4 заплаты, площадь каждой из которых не менее 5/8. Докажите, что какие-то две из них имеют общую часть площади не менее 1/3.

Задача 8: На спортивные соревнования в ЛМШ ходили 220 школьников. При этом некоторые из них участвовали в чемпионатах, а остальные были зрителями. В легкоатлетической эстафете приняли участие 30 человек, в соревнованиях по волейболу – 26, пионерболу – 32, футболу – 31, шахматам – 28 и теннису – 36 человек. 53 школьника приняли участие более чем в одном соревновании; из них 24 школьника участвовали 3 или более раз, 9 школьников – не менее 4 раз и 3 школьника – даже 5 раз (в последнюю тройку входит и один чудак, который выступал во всех шести соревнованиях). Сколько из школьников были зрителями?

Задача 9: На кафтан площади 1 поставлены 5 заплат. Площадь каждой из них равна 1/2. Докажите, что найдутся две заплаты, пересекающиеся по площади не менее 1/5.

Задача 10: На кафтане площади 1 имеется 5 заплат площади 1/3. Докажите, что найдутся такие две заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/15.

Задача 11: На кафтане площади 1 имеется 9 заплат площади 1/5. Докажите, что найдутся такие две заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/45.

Делимость-1Задача 1: Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов, на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

Задача 2: Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж 3-х рублевыми ассигнациями, Коля – 5-ти рублевыми, а всего они дали в кассу меньше 15 купюр?

Задача 3: а) $a + 2$ делится на 5, докажите, что $7a + 4$ делится на 5; б) $2000 + a$ и $999 - b$ делятся на 11, докажите, что $a + b$ делится на 11.

Задача 4: Доказать а) если сумма любых двух из трёх чисел делится на 3, то и сумма всех трёх чисел делится на 3; б) если сумма любых трёх из четырёх чисел делится на 4, то и каждое число делится на 4; в) сформулируйте и докажите утверждение б) для n чисел.

Задача 5: Докажите, что число, составленное из пятидесяти пяти единиц, является составным.

Задача 6: На новом супер-калькуляторе есть только три кнопки: «умножить на 7», «прибавить 27» и «вычесть 12". Можно ли на этом калькуляторе из числа 6 получить число 1? Какие числа можно получить из числа 6?

Задача 7: Докажите, что числа вида $\overline{aaa}$ делятся и на 3 и на 37.

Задача 8: Петя и Вася задумали по трёхзначному числу, затем каждый приписал к нему такое же число. У полученного шестизначного числа они выписали все натуральные делители. Докажите, что не менее 8 чисел в их списках совпало.

Задача 9: Делится ли число 77…77 (666 семерок) на 13?

Задача 10: При каких n число 88…88 (n восмерок) делится на 91?

Задача 11: Дана полоска из 6 клеток. Петя и Вася по очереди записывают в клетки цифры. Если полученное число делится на 91, то выигрывает Вася, если нет, то Петя. Всегда ли Вася сможет победить? А если полоска состоит из 12 клеток?

Задача 12: У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери камер 2, 4, 6, … вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки камер 3, 6, 9, 12 и т.д. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Задача 13: Делится ли $2^9 \times 3$ на 2? А на 5? На 6? Делится ли $2^2 \times 3^3 \times 5^5$ на 120?

Задача 14: Число a не делится на 3. Может ли делится на 3 число 2a?

Задача 15: Число a чётно. Верно ли, что число 3a делится на 6?

Задача 16: Число 5a делится на 3. Верно ли, что a делится на 3?

Задача 17: Если число a делится на 3 и на 4, то следует ли отсюда, что оно делится и на 12? А если a делится на 4 и на 6, то следует ли отсюда, что оно делится на 24?

Задача 18: Число 15a делится на 6. Верно ли что a тоже делится на 6?

Взаимно простые числа. Обобщить результат задач 5 и 6: если a делится на m и на n, m и n взаимно просты, то a делится на mn; если ap делится на q, p и q взаимно просты, то a делится на q.

Задача 19: Известно, что a + 15 делится на 5. Делится ли a на 5?

Задача 20: Если число a делится на 3 и b делится на 3, верно ли, что тогда сумма a и b делится на 3? А разность a и b?

Задача 21: Вспомнить некоторые свойства делимости:

а) $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a \pm b \vdots c$.

б) $a \pm b \vdots c$, и $a \vdots c$, то и $b \vdots c$.

в) $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то и $a \vdots c$.

Задача 22: Сколько существует двузначных чисел, которые делятся на 5? А трёхзначных, которые делятся на 7?

Задача 23: Доказать, что произведение а) любых двух последовательных натуральных чисел делится на 2; б) трёх любых последовательных натуральных чисел делится на 6.

Задача 24: А что можно сказать про произведения четырёх, пяти, n идущих подряд чисел?

Задача 25: Доказать, что для любого $n > 2$ а) сумма первых n натуральных чисел – составное число; б)* сумма любых n последовательных натуральных чисел – составное число.

Задача 26: Разложите на простые множители 2000, 2001, 1999.

Задача 27: Сколько делителей у числа $2^5 \times 3^3 \times 5^2$? А у чисел 2000, 2001, 1999?

Задача 28: Сколько делителей у чисел 1, 4, 9, 16, 25; а у чисел 5, 10, 15, 24? Сравните количество делителей.

Задача 29: Может ли в разложении числа n^2 на простые множители содержаться ровно 5 «троек»?

Задача 30: Делится ли 11! + 12! на 13?

Задача 31: На сколько нулей заканчивается 200!,?

Задача 32: Может ли n! оканчиваться ровно на 5 нулей?

Задача 33: Каково наименьшее натуральное n такое, что n! делится на 1999, 2000, 2001?

Делимость-2Задача 1: Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 50, 100.

Задача 2: Почему верны признаки «Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2» и «Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5» и не верны аналогичные признаки для других однозначных чисел?

Задача 3: Почему верен признак «Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последним цифрами делится на 4»? Сформулируйте аналогичные признаки делимости для чисел 25 и 50. Что общего у этих чисел с числом 4?

Задача 4: Назовем число «забавным», если все его цифры делятся на 4. А делится ли «забавное» число на 4? Существуют ли не «забавные» числа, которые делятся на 4?

Задача 5: Сформулируйте и докажите признаки делимости на 8 и 125. (А на 2^n и 5^n?)

Задача 6: Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9. Верны ли аналогичные признаки для других однозначных чисел? Почему всякое число вида 10 … 0 при делении на 9 (и на 3) дает в остатке 1?

Задача 7: Какой остаток от деления на 3 и на 9 дает число вида $\overline{a0\ldots0}$? Докажите, что число и его сумма цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки. Докажите, что то же верно при делении на 3.

Задача 8: Задумайте число. Прибавьте 2, умножьте на 3, возведите в квадрат, прибавьте 36, посчитайте сумму цифр, еще раз, и еще, пока не получите однозначное число. Отнимите от него 4. Найдите n-ую букву алфавита, придумайте на нее название страны, на третью букву названия придумайте животное. Так вот, в Дании носороги не водятся!

Объясните этот фокус.

Задача 9: Докажите, что 11 … 1 (27 единиц) делится на 27. Верен ли признак делимости на 27, аналогичный признакам делимости на 3 и 9?

Задача 10: Как проверить, делится ли число на а) 6; б) 12; в) 15; г) 18; д) 30; е) 45; ж) 75; з) 225?

Задача 11: При каких а число $\overline{875a}$ делится на 6?

Задача 12: Из двузначного числа вычли число, получающееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что результат делится на 9.

Задача 13: Шестиклассник Петя перемножил все числа от 1 до 2000. У полученного числа он подсчитал сумму цифр, затем подсчитал сумму цифр результата, и так далее, пока не получил число, состоящее из одной цифры. Какое?

Задача 14: Натуральное число возвели в квадрат. Может ли результат оканчиваться на 66?

Задача 15: Ольга Сергеевна называет три цифры. А Константин Александрович говорит, что всегда сможет составить из них одно-, двух- или трёхзначное число, делящееся на 3. Прав ли он?

Задача 16: В ряд стоят 100 фишек. Разрешается поменять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли переставить все фишки в обратном порядке?

Задача 17: В трёхзначном числе n первые две цифры одинаковые, а последняя цифра – 5. Кроме того, известно, что n дает остаток 8 при делении на некоторое однозначное число. Найдите n.

Задача 18: На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

Задача 19: Из числа 123123123123 вычеркните несколько цифр так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 9.

Задача 20: Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

Задача 21: Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 120 раз. Докажите, что в результате получился нуль.

Задача 22: Шесть игральных кубиков нанизали на спицу (протыкая ею центры противоположных граней кубиков) так, что каждый может вращаться независимо от остальных. На гранях каждого кубика написаны все цифры от 1 до 6, причём сумма цифр на противоположных гранях равна 7. Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях кубиков. Докажите, что можно так повернуть кубики, чтобы это число делилось на 7.

Задача 23: В десятизначном числе все цифры встречаются по разу. Может ли оно делиться на 11?

Делимость-3Задача 1: Существует ли такая тройка натуральных чисел, что любые два из них имеют общий делитель, больший единицы, но общим делителем для всех трёх чисел является только 1?

Задача 2: Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 1999 шиллингов?

Задача 3: В банк можно положить за один раз 120 руб. или снять 300 руб. У кого-то есть 1000 руб. Какую наибольшую сумму кто-то может положить в банк за несколько раз?

Задача 4: $a = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Чему равен НОД (a,b)?

Задача 5: $a = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$, $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Чему равен $\text{НОК}(a, b)$?

Задача 6: Про натуральные числа a и b известно, что 15a = 14b и что НОД (a,b) = 13. Найдите a и b.

Задача 7: Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство

$\text{НОК}(a, b)\,\text{НОД}(a, b) = ab.$

Задача 8: Докажите, что если a и b – натуральные числа (a > b), то НОД (a,b) = НОД (a – b,b)

Задача 9: Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме?

Задача 10: Может ли наименьшее общее кратное трёх чисел равняться их сумме?

Задача 11: НОД двух натуральных чисел в восемь раз меньше, чем их НОК. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.

Задача 12: Даны 6 натуральных чисел. Могут ли среди их попарных НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

Задача 13: Разность двух нечётных чисел является степенью двойки. Докажите, что они взаимно просты.

Задача 14: Известно, что (n – 1)! + 1 делится на n. Докажите, что число n – простое.

Задача 15: В результате некоторой перестановки цифр число уменьшилось в три раза. Докажите, что исходное число делилось на 27.

Задача 16: Найдите все такие натуральные a, что число а) $\frac{12}{2a+1}$; б) $\frac{a+3}{a-1}$; в) $\frac{3a+2}{a-2}$ – тоже целое.