

ИНВАРИАНТЫ

Работа по теме занятия

Ввести понятие инварианта: *инвариантом* некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления. Хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки, раскраски и т. п. Причем применение четности — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Вспомнить определения четного и нечетного числа. Особое внимание надо уделить абстрактному понятию четности, объяснить, что означает термин «разная четность». Рассмотреть простые примеры. Например, число $x + 2$ имеет ту же четность, что и число x (или оба четные, или оба нечетные), а при прибавлении единицы четность числа меняется. Далее можно сформулировать два важных более общих утверждения, на которых основано применение идеи четности и нечетности:

Лемма 1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.

Привести примеры:

1. Число $1 + 2 + \dots + 10$ — нечетное, так как в сумме 5 нечетных слагаемых.

2. Число $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ — четное, так как в сумме 6 нечетных слагаемых.

Лемма 2. Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Примеры:

1. Число $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$ положительно, так как в произведении четное число отрицательных сомножителей.

2. Число $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)$ отрицательно, так как в произведении нечетное число отрицательных сомножителей.

После этого подробно разобрать с учащимися решение следующих задач.

1. Учитель написал на листке бумаги число 10. 15 учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

Прежде чем разобрать решение данной задачи, предложить учащимся выполнить данную операцию (при этом в зависимости от числа учащихся можно изменить числа 15 и 10). Заметить закономерность: после каждого хода характер четности меняется: после первого ученика число становится нечетным; после второго четным; после третьего — нечетным. Тогда после пятнадцатого число будет нечетным. Поэтому нуль в конце получиться не может.

2. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа, и если

они одинаковые, то допишите к оставшимся числам нуль, а если разные — то единицу. Какое число останется на доске?

Решение. Сумма 15 исходных чисел равна 7. А 7 — число нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетная. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске останется после дописывания нуля 9 нулей и 5 единиц. Сумма данных 14 чисел будет нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получим на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является нечетным числом. Таким образом, мы замечаем, что после выполнения данной операции на доске получается на 1 число меньше, причем сумма оставшихся чисел все время остается нечетной. Далее продолжаем эту операцию, т. е. переходим от 14 чисел к 13 и т. д. Так как 1 — нечетное число, а 0 — четное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получается нечетное число, т. е. 1.

Вывод. Инвариантом в задачах 1 и 2 являлась четность суммы чисел (она нечетная).

3. Все костяшки домино выложены в цепь (по правилам домино). На одном конце цепи оказалось 3 очка. Сколько очков на другом конце?

Решение. Всего имеется семь костяшек с тройкой на конце: 0-3, 1-3, 2-3, 3-3, 4-3, 5-3, 6-3. Костяшка 3-3 имеет «тройку» на обоих концах. Всего получается восемь «троек». Так как при игре в домино в цепи они должны располагаться парами, то на другом конце цепи будет 3 очка.

Вывод. При решении аналогичных задач полезно иногда объекты разбивать на пары. Инвариантом здесь является четность количества троек на всех костяшках.

4. Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

Решение. Так как произведение чисел в каждой строке квадрата отрицательно, то и произведение всех чисел в этом квадрате будет отрицательно. Но с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах. А так как произведение всех чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

Вывод. Инвариант — знак произведения чисел (он отрицательный).

Устные упражнения

5. Какие часы чаще показывают точное время: те, которые отстают на 1 минуту в день, или те, которые стоят?

6. На дереве сидело 20 ворон. Охотник выстрелил и убил двух ворон. Сколько ворон осталось на дереве?

7. Математик, оказавшись в небольшом городке, решил подстричься. В городке было лишь две парикмахерских. Заглянув к одному мастеру, он

увидел, что в салоне грязно, сам мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне второго мастера все было чисто, а сам владелец был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Тем не менее, математик отправился стричься к первому парикмахеру. Почему?

Самостоятельная работа

8. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?

9. Конь вышел с поля $a1$ шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

10. 2006 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?

11. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

Домашнее задание

12. На столе стоят 6 стаканов. Из них 5 стоят правильно, а один перевернут вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно.

13. Мише учитель математики поставил в дневник отметку «2». Миша, желая скрыть от мамы данный факт, порвал свой дневник на 4 части. Этому ему показалось мало, поэтому некоторые из этих частей (может быть, и не все) он порвал на 4 части и так далее. Мама нашла 20 «кусочков» дневника. Все ли куски нашла мама?

14. Разрежьте квадрат на 4 части одинаковой формы и размера так, чтобы в каждую часть попало ровно по одному заштрихованному (рис. 2) квадрату.

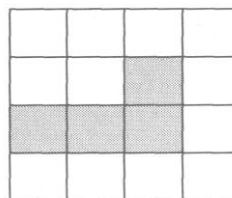


Рис. 2

Решения и ответы

5. Вторые, так как первые показывают верное время 1 раз в 2 года, а вторые 2 раза в год.

6. Ни одной. В принципе могло остаться на дереве и 1 и 2 вороны, если при падении на землю они застряли в ветвях дерева. Остальные вороны улетели.

7. Так как в городе всего две парикмахерских, а второй мастер хорошо выбрит и аккуратно подстрижен, то подстриг его первый мастер.

8. Нет, так как сумма 15 нечетных чисел — число нечетное, а 50 — число четное.

9. При каждом своем ходе конь меняет цвет поля, поэтому при возвращении обратно он должен сделать четное число ходов.

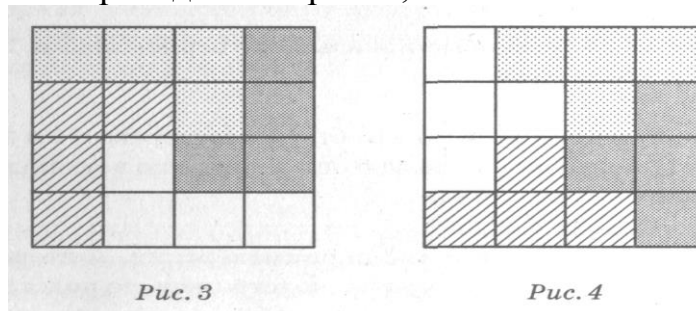
10. Не всегда. При перестановке сохраняется четность номера места. Поэтому если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым. Здесь число 2006 роли не играет.

11. Так как число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то четность числа арбузов в этих корзинах будет разной. Тогда четность числа арбузов в корзинах будет чередоваться, поэтому в половине корзин будет четное число арбузов, а в половине нечетное. Тогда общее число арбузов в 8 корзинах с четным числом арбузов и в 8 корзинах с нечетным числом арбузов будет четным. По условию же всего арбузов — 55, нечетное число. Значит, разложить нельзя.

12. Нет, так как в любом случае число перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечетным.

13. Так как число кусков могло быть 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22, то мама нашла не все куски.

14. Два решения приведены на рис. 3,4.



Методический комментарий. В связи с тем, что учащиеся сегодня учатся в начальной школе и в 5-6 классах по различным системам обучения и различным учебникам, учителю, возможно, придется ввести понятие отрицательного числа или не решать задачу № 4. При разборе домашней задачи № 13 сделать вывод, что данную задачу можно было решить иначе, заметив, что число кусков, которые могли получиться, записываются в виде $3p + 1$, а число $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Получаются разные остатки от деления на 3. Остаток от деления также может быть инвариантом, но задачи на применение данного и других инвариантов будут рассмотрены позже. Также желательно для разбора решения задачи № 8 иметь шахматную доску или ее изображение.