

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СМЕШИВАНИЕ РАСТВОРОВ

“Только из союза двоих, работающих вместе и при помощи друг друга, рождаются великие вещи.”
Антуан Де Сент-Экзюпери

Математика многообразна и многогранна. Существует ряд ситуаций в образовательном процессе, когда при изучении какой-либо темы по физике, химии, биологии и т.д. затрагиваются понятия математики, например, существуют задачи, которые решают как на уроках математики, так и на уроках химии. Способы решения задач представляют и учителя химии, и математики, но есть проблема: математики знают математику, а химики - химию. И не всегда способы совпадают.

В данной статье приводятся рекомендации по решению химических задач на смешение растворов разными способами: с помощью расчетной формулы, “Правила смешения”, “Правила креста”, графического метода, алгебраического метода. Приведены примеры решения задач.

1. Основные химические понятия

Приведем некоторые указания к решению задач на растворы.

Основными компонентами этого типа задач являются:

- а) массовая доля растворенного вещества в растворе;
- б) масса растворенного вещества в растворе;
- в) масса раствора.

Предполагают, что:

- а) все получившиеся смеси и сплавы являются однородными;
- б) смешивание различных растворов происходит мгновенно;
- в) объем смеси равен сумме объемов смешиваемых растворов;
- г) объемы растворов и массы сплавов не могут быть отрицательными.

Определения и обозначения.

Массовая доля растворенного вещества в растворе - это отношение массы этого вещества к массе раствора.

$$(1) \quad \omega = \frac{m(s - sa)}{m(p - pa)}$$

где ω - массовая доля растворенного вещества в растворе;

$m(s - sa)$ - масса растворенного вещества в растворе;

$m(p - pa)$ - масса раствора.

Следствия формулы (1):

$$(2) \quad m(s - sa) = \omega \cdot m(p - pa);$$

$$(3) \quad m(p - pa) = \frac{m(s - sa)}{\omega}.$$

Введем обозначения:

ω_1 - массовая доля растворенного вещества в первом растворе;

ω_2 - массовая доля растворенного вещества во втором растворе;

ω - массовая доля растворенного вещества в новом растворе, полученном при смешивании первого и второго растворов;

$m_1(\text{в-ва})$, $m_2(\text{в-ва})$, $m(\text{в-ва})$ - массы растворенных веществ в соответствующих растворах;

$m_1(\text{р-ра})$, $m_2(\text{р-ра})$, $m(\text{р-ра})$ - массы соответствующих растворов.

Основными методами решения задач на смешивание растворов являются: с помощью расчетной формулы, “Правило смешения”, “Правило креста”, графический метод, алгебраический метод.

Приведем описание указанных методов.

1.1. С помощью расчетной формулы

В наших обозначениях, получим формулу для вычисления массовой доли вещества (?) в смеси.

1. Масса полученного при смешивании раствора равна:

$$m(\text{р-ра}) = m_1(\text{р-ра}) + m_2(\text{р-ра}).$$

2. Определим массы растворенных веществ в первом и втором растворах:

$$m_1(\text{в-ва}) = \omega_1 \cdot m_1(\text{р-ра}), \quad m_2(\text{в-ва}) = \omega_2 \cdot m_2(\text{р-ра}).$$

3. Следовательно, масса растворенного вещества в полученном растворе вычисляется как сумма масс веществ в исходных растворах:

$$m(\text{в-ва}) = m_1(\text{в-ва}) + m_2(\text{в-ва}) = \omega_1 \cdot m_1(\text{р-ра}) + \omega_2 \cdot m_2(\text{р-ра}).$$

4. Таким образом, массовая доля растворенного вещества в полученном растворе равна:

$$(1) \quad \omega = \frac{m(\text{в-ва})}{m(\text{р-ра})}$$

или

$$\omega = \frac{\omega_1 m_1(\text{р-ра}) + \omega_2 m_2(\text{р-ра})}{m_1(\text{р-ра}) + m_2(\text{р-ра})}$$

или

$$(4) \quad \omega = \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

где m_1, m_2 - массы соответствующих растворов.

Замечание: При решении задач удобно составлять следующую таблицу.

	1-й раствор	2-й раствор	Смесь двух растворов
Масса растворов	m_1	m_2	$m_1 + m_2$
Массовая доля растворенного вещества	ω_1	ω_2	ω
Масса вещества в растворе	$\omega_1 m_1$	$\omega_2 m_2$	$\omega (m_1 + m_2)$

1.2. “Правило смешения”

$$\omega = \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

Воспользуемся формулой (4):

$$\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 = \omega(m_1 + m_2);$$

$$\omega_1 m_1 - \omega m_1 = \omega m_2 - \omega_2 m_2;$$

тогда $m_1(\omega_1 - \omega) = m_2(\omega - \omega_2)$.

$$(5) \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega - \omega_2}{\omega_1 - \omega}, \text{ при } \omega_1 > \omega_2.$$

Отсюда

Таким образом, **отношение массы первого раствора к массе второго равно отношению разности массовых долей смеси и второго раствора к разности массовых долей первого раствора и смеси.**

$$\omega_2 > \omega_1, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_2 - \omega}{\omega - \omega_1}.$$

Аналогично получаем, что при

Замечание: Формула (5) удобна тем, что на практике, как правило, массы веществ не отвешиваются, а берутся в определенном отношении.

1.3. “Правило креста”

“Правилом креста” называют диагональную схему правила смешения для случаев с двумя растворами.

$$\begin{array}{ccc} \text{I раствор} & \omega_1 & \diagdown \\ & & \omega \\ & & \diagup \\ \text{II раствор} & \omega_2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \omega - \omega_2 \quad \text{массовые части I раствора} \\ \omega_1 - \omega \quad \text{массовые части II раствора} \end{array}$$

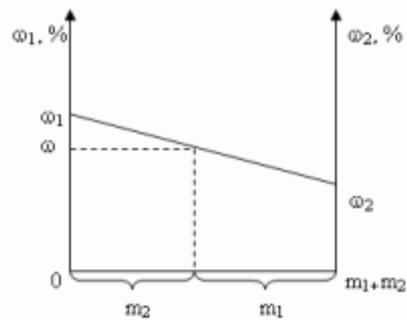
Слева на концах отрезков записывают исходные массовые доли растворов (обычно слева вверху-большая), на пересечении отрезков - заданная, а справа на их концах записываются разности между исходными и заданной массовыми долями. Получаемые массовые части показывают в каком отношении надо слить исходные растворы.

1.4. Графический метод

Отрезок прямой (основание графика) представляет собой массу смеси, а на осях ординат откладывают точки, соответствующие массовым долям растворенного вещества в исходных растворах. Соединив прямой точки на осях ординат, получают прямую, которая отображает функциональную зависимость массовой доли растворенного вещества в смеси от массы смешанных растворов в обратной пропорциональной зависимости

$$\left(\omega = \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{m_1 + m_2}, y = \frac{k}{x} \right).$$

Полученная функциональная прямая позволяет решать задачи по определению массы смешанных растворов и обратные, по массе смешанных растворов находить массовую долю полученной смеси.



Построим график зависимости массовой доли растворенного вещества от массы смешанных растворов. На одной из осей ординат откладывают точку, соответствующую массовой доли ω_1 , а на другой - ω_2 . Обозначим на оси абсцисс точки **A** и **B** с координатами $(0,0)$ и $(m_1 + m_2,0)$, соответственно. На графике точка **A**(0,0) показывает, что массовая доля всего раствора равна ω_1 , а точка **B**($m_1 + m_2,0$) - массовая доля всего раствора равна ω_2 . В направлении от точки **A** к точке **B** возрастает содержание в смеси 2-го раствора от 0 до $m_1 + m_2$ и убывает содержание 1-го раствора от $m_1 + m_2$ до 0. Таким образом, любая точка на отрезке **AB** будет представлять собой смесь, имеющую одну и ту же массу с определенным содержанием каждого раствора, которое влияет на массовую долю растворенного вещества в смеси.

Замечание: Данный способ является наглядным и дает приближенное решение. При использовании миллиметровой бумаги можно получить достаточно точный ответ.

1.5. Алгебраический метод

Задачи на смешивание растворов решают с помощью составления уравнения или системы уравнений.

2. Примеры решения задач

Задача 1. (№1.43, [1])

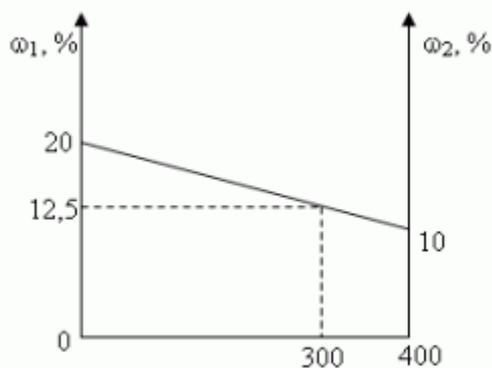
В 100 г 20%-ного раствора соли добавили 300 г её 10%-ного раствора. Определите процентную концентрацию раствора.

Решение:

1. С помощью расчетной формулы

$m_1(\text{р-ра}) = 100\text{г}$	Воспользуемся формулой (4) $\omega = \frac{\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2}{m_1 + m_2}$, получаем $\omega = \frac{0,2 \cdot 100\text{г} + 0,1 \cdot 300\text{г}}{100\text{г} + 300\text{г}} = \frac{50\text{г}}{400\text{г}} = 0,125 \text{ (12,5\%)}$
$m_2(\text{р-ра}) = 300\text{г}$	
$\omega_1 = 0,2$	
$\omega_2 = 0,1$	
$\omega - ?$	Ответ: 12,5%

2. Графический



Ответ: 12,5%

3. Путем последовательных вычислений

○ Сколько растворенного вещества содержится:

а) в 100 г 20%-ного раствора; $[100 \cdot 0,2 = 20(\text{г})]$

б) в 300 г 10%-ного раствора? $[300 \cdot 0,1 = 30(\text{г})]$

○ Сколько вещества содержится в образовавшемся растворе?

$$20 \text{ г} + 30 \text{ г} = 50 \text{ г}$$

○ Чему равна масса образовавшегося раствора?

$$100 \text{ г} + 300 \text{ г} = 400 \text{ г}$$

○ Какова процентная концентрация полученного раствора?

$$(50/400)100 = 12,5(\%)$$

Ответ: 12,5%

4. Алгебраический

Пусть x - процентная концентрация полученного раствора. В первом растворе содержится $0,2 \cdot 100(\text{г})$ соли, а во втором $0,1 \cdot 300(\text{г})$, а в полученном растворе $x \cdot (100 + 300)(\text{г})$ соли. Составим уравнение:

$$0,2 \cdot 100 + 0,1 \cdot 300 = x \cdot (100 + 300);$$

$$x = 0,125 \text{ (12,5\%)}$$

Ответ: 12,5%

Задача 2. и(№10.26, [1])

Смешали 10%-ный и 25%-ный растворы соли и получили 3 кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?

Решение:

1. Алгебраический

а) С помощью уравнения:

Пусть x (кг) - масса 1-го раствора, тогда $3-x$ (кг) - масса 2-го раствора.

$0,1 \cdot x$ (кг) содержится соли в 1-ом растворе,

$0,25 \cdot (3-x)$ (кг) содержится соли в 2-ом растворе,

$0,2 \cdot 3$ (кг) содержится соли в смеси.

Учитывая, что масса соли в 1-ом и 2-ом растворах равна массе соли в смеси, составим и решим уравнение:

$$0,1 \cdot x + 0,25 \cdot (3-x) = 0,2 \cdot 3;$$

$$0,15x = 0,15;$$

$$x = 1, \text{ 1кг-масса 1-го раствора}$$

$3 - x = 3 - 1 = 2$ (кг) - масса 2-го раствора.

Ответ: 1 кг, 2 кг.

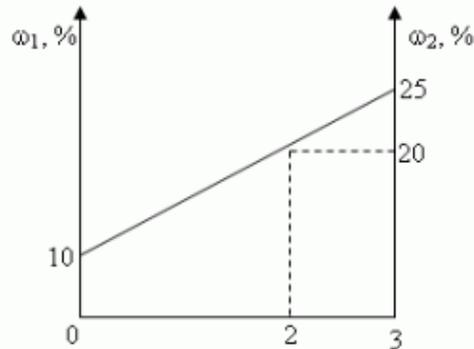
б) С помощью системы уравнений

Пусть x (кг) - количество первого раствора, y (кг) - количество второго раствора. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 0,1x + 0,25y = 0,2 \cdot 3. \end{cases}$$

Ответ: 1 кг, 2 кг.

2. *Графический.*



Ответ: 1кг, 2кг.

3. *“Правило смешения”*

$m(\text{р-ра}) = 3\text{кг}$	Вспользуемся формулой (5) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega - \omega_2}{\omega_1 - \omega}$, Подставляя ω , ω_1 , ω_2 , получаем: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{0,25 - 0,2}{0,2 - 0,1}$, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{0,05}{0,1}$, $m_1 : m_2 = 0,05 : 0,1 = 1 : 2$ Следовательно, $m_1 = 1\text{кг}$, $m_2 = 2\text{кг}$. Ответ: 1кг, 2кг.
$\omega_1 = 0,1$	
$\omega_2 = 0,25$	
$\omega = 0,2$	
$m_1, m_2 - ?$	

4. *“Правило креста”*

Составим диагональную схему

<i>II раствор</i>	0,25	↘	0,2	↙	0,1	<i>массовые части II раствора</i>
<i>I раствор</i>	0,1	↗		↘	0,05	<i>массовые части I раствора</i>

Следовательно, $m_2 : m_1 = 0,1 : 0,05 = 2 : 1$.

Ответ: 1кг, 2кг.

Задача 3 ([2])

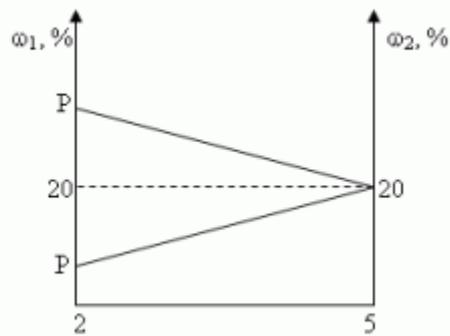
Сосуд емкостью 5 л содержит 2 л р%-ного (по объёму) раствора соли. Сколько литров 20%-ного раствора такой же соли надо налить в сосуд, чтобы процентное содержание соли в сосуде стало наибольшим?

Решение (графический способ)

$$\begin{array}{l} \omega_1 = 0,01 \cdot p \\ \omega_2 = 0,2 \\ V_1(p-pa) = 2\text{л} \\ \hline V_2(p-pa) - ? \end{array}$$

Рассмотрим 3 случая:

- 1) $p < 20$;
- 2) $p = 20$;
- 3) $p > 20$.



Заметим, что по условию, объём второго раствора не превышает трёх литров.

1. Если $p < 20$, то для того, чтобы получить максимальную массовую долю вещества в растворе, необходимо добавить 3 л 20% - ного раствора соли;

2. Если $p = 20$, то при добавлении 2-го раствора, процентное содержание соли в растворе не изменится, следовательно, можно прилить от 0 л до 3 л 20% - ного раствора соли;

3. Если $p > 20$, то при добавлении 2-го раствора, процентное содержание соли будет уменьшаться, т.е. прилить нужно 0 л.

Ответ: 3 л, если $0 < p < 20$, $[0,3]$, если $p = 20$, 0л, если $20 < p \leq 100$.

Задача 4 (работа 5, №2, [1])

В двух сосудах по 5л каждый содержится раствор соли. Первый сосуд содержит 3л $p\%$ - ного раствора, а второй - 4л $2p\%$ - ного раствора одной и той же соли. Сколько литров надо перелить из второго сосуда в первый, чтобы получить в нем 10% - ный раствор соли? При каких значениях p задача имеет решение?

Решение

$V_1 = 3\text{л}$	Пусть x л второго раствора необходимо перелить в первый сосуд, тогда воспользовавшись формулой (4), получаем:
$\omega_1 = 0,01 \cdot p$	
$\omega_2 = 0,01 \cdot 2p$	
$\omega = 0,1$	
$V_2 - ?$	$0,1 = \frac{0,01p \cdot 3 + 0,02p \cdot x}{3 + x},$ <p style="text-align: center;">отсюда $x = \frac{3(p - 10)}{2(5 - p)}$.</p> <p>Итак, $\frac{3(p - 10)}{2(5 - p)}$ л – необходимо долить в первый раствор.</p>

Найдем, при каких значениях p задача имеет решение. По условию задачи 5-ти литровой сосуд содержит 3л первого раствора, следовательно, к нему можно прилить от 0 до 2л второго раствора.

Имеем, $0 \leq \frac{3(p - 10)}{2(5 - p)} \leq 2$. Решая неравенство, получаем $7\frac{1}{7} \leq p \leq 10$.

Ответ: $\frac{3(p - 10)}{2(5 - p)}$, $7\frac{1}{7} \leq p \leq 10$.

3. Заключение

Данные рекомендации предназначены учителям математики, желающим организовать элективные курсы, как в девятых, так и в десятых и одиннадцатых классах. Цель создаваемых курсов: научить учащихся пользоваться математическим аппаратом при решении химических задач.