Управление по образованию Полоцкого районного исполнительного комитета

# Сборник олимпиадных задач для 5 – 7 классов

2020

г. Полоцк

## Приняли участие школы: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 18, ПГГ 1, Вороничи, Ветрино, Матюши.

## Оглавление

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы в практике образования возрос интерес к одаренным детям, поскольку это определяет перспективу экономического, социального и культурного развития нашего общества.

В Республике Беларусь проводятся различные математические олимпиады и конкурсы. Одна из основных – республиканская, которая проходит в несколько этапов.

Для учащихся 5 – 7 классов проводится математическая олимпиада в два этапа: школьный и районный.

Для успешного участия в олимпиадах необходимо выполнение следующих условий:

- систематическое проведение внеклассной работы по предмету;

- регулярность проведения всех этапов;

- серьезная подготовительная работа;

- интересное предметное содержание.

Учителя математики всех школ города Полоцка приняли активное участие в создании данного сборника олимпиадных задач для учащихся 5 – 7 классов.

На основе опыта работы по подготовке учащихся к олимпиадам были отобраны темы.

5 класс

1. Задачи логического характера.
2. Взвешивание и переливание.
3. Задачи на числовые зависимости.
4. Разрезания. Замощения. Раскраски.
5. Задачи на движение ( + по кругу).
6. Задачи на циферблате.
7. Задачи ребусы.
8. Задачи на работу.

6 класс

1. Задачи логического характера.
2. Задачи на числовые зависимости.
3. Полуинварианты.
4. Разрезания. Замощения.
5. Задачи на движение ( + по кругу).
6. Задачи на проценты.
7. Иллюстративные задачи.
8. Принцип Дирихле.
9. Задачи на работу.

7 класс

1. Задачи логического характера.
2. Задачи на многочлены.
3. Инварианты и делимость.
4. Задачи на движение ( + по кругу).
5. Задачи на проценты.

6. Геометрические олимпиадные задачи.
7. Разрезания. Замощения.
8. Разные задачи.
9. Принцип Дирихле.

Учебный материал данного сборника ценен тем, что составляет основу математических идей решения многих олимпиадных задач.

# Глава 1. Олимпиадные задания для учащихся 5 классов.

1. **Задачи логического характера.**

**№ 1.1.** Условие: Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: "У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек." Прав ли он?

**№ 1.2**.Условие: Каждый житель острова Сонный просыпается всегда одним и тем же способом. Способов всего три: (А) открыть одновременно оба глаза и бежать на зарядку; (Б) открыть сначала левый глаз, а через 16 минут — правый, и бежать на завтрак; (В) открыть сначала правый глаз, а через 27 минут — левый. В социологическом опросе службы "Доброе утро" приняли участие жители городов Кривдина и Правдина, всего 1024 островитянина. Каждому было задано по 3 вопроса: (1) "Просыпаетесь ли Вы способом А?", (2) "Просыпаетесь ли Вы способом Б?", (3) "Просыпаетесь ли Вы способом В?" Ответов "Да" на первый вопрос было 289, на второй вопрос — 361, на третий вопрос — 441. Сколько жителей каждого из городов приняло участие в опросе?

**№ 1.3.** Условие: Шестьдесят листов книги сказок А.С. Пушкина имеют толщину 1 см. Какова толщина всей книги, если в ней 240 страниц?

**№ 1.4.** Условие: Три друга Коля, Олег и Петя играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Коля сказал: «Это не я разбил стекло». Олег сказал: «Это Петя разбил стекло». Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое- нет. Кто из мальчиков разбил стекло?

**№ 1.5.** Условие: Из трех учеников ( А, Б, В) два отличника. Определите, кто отличник, если известно, что из А и Б отличник один, из Б и В также отличник один.

**№ 1.6.** Условие: Три рыбака поймали какое – то количество рыб. Первый рыбак выбросил одну рыбу, взял себе третью часть и ушёл. Второй рыбак также выбросил из остатка 1 рыбу, взял себе третью часть и ушел. После того, как то же сделал третий рыбак, в ведре осталось 6 рыб. А сколько было первоначально?

**№ 1.7.** Условие: Человек живет на 17-м этаже. На свой этаж он поднимается на лифте только в дождливую погоду или тогда, когда кто-нибудь из соседей с ним едет в лифте. Если погода хорошая и он один в лифте, то он едет до 9-го этажа, а дальше до 17-го этажа идет пешком по лестнице. Почему?

**№ 1.8.** Условие: Возвращаясь с рыбалки домой, рыболов встретил своего приятеля, который поинтересовался его уловом.

Но, так как наш рыболов помимо рыбалки был также большим любителем всякого рода загадок, ответил приятелю следующим образом: "Если к количеству пойманной мною рыбы добавить половину улова и еще десяток рыбин, то мой улов составил бы ровно сотню рыб". Сколько рыбы поймал рыболов?

**№ 1.9.** Условие: У Вас есть два шнура (фитиля). Каждый шнур, подожженный с конца, полностью сгорает дотла ровно за один час, но при этом горит с неравномерной скоростью.

Как при помощи этих шнуров и зажигалки отмерить время в 45 минут?

**№ 1.10.** Условие: Купец купил плащ, шляпу и калоши и заплатил за все 140 рублей. Плащ стоит на 90 рублей больше, чем шляпа, а шляпа и плащ вместе на 120 рублей больше, чем калоши. Сколько стоит каждая вещь в отдельности?

Задачу требуется решить устным счетом, без уравнений.

**№ 1.11.** Условие: Предположим Вам надо повалить бетонную стену длиной в 20 метров, высотой в 3 метра и весом в 3 тонны.

Как вы выполните эту задачу, если в вашем распоряжении нет абсолютно никаких инструментов?

**№ 1.12.** Условие: В ящике имеются 12 одинаковых шаров, отличающихся только цветом: 6 красных, 3 белых, 2 зеленых, 1 чёрный. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика наугад (не заглядывая в него), чтобы среди вынутых шаров было:

а) не менее двух шаров одного (любого) цвета?

б) хотя бы три шара одного цвета?

**№ 1.13.** Условие: Расставьте в клетках 4 на 4 одну единицу, 2 двойки, 3 тройки, 4 четверки, 5 пятерок и одну любую цифру по своему выбору так, чтобы во всех строках получилась одна и та же сумма цифр.

**№ 1.14.** Условие: Расположите на плоскости 12 спичек так, чтобы они образовали как можно больше квадратов. Укажите количество квадратов.

**№ 1.15.** Условие: Заполни все клетки квадрата так, чтобы сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям была одинакова.

| | | |
|---|---|---|
| | | 3 |
| | 6 | 10 |
| 9 | | |

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 2 | 3 |
| 4 | 5 |
| 6 | 7 |
| 8 | 9 |

**№ 1.16.** Условие: В забеге участвовало 37 человек. Число спортсменов, прибежавших раньше Игоря, в 5 раз меньше числа тех, кто прибежал позже. Какое место занял Игорь?

**№ 1.17.** Условие: В семье четверо детей, им 5,8,13и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3?

**№ 1.18.** Условие: Три рыбака решили сообща сварить на костре уху. Первый дал два окуня, второй четыре, а третий рыбак внес свою долю деньгами, дав 60 рублей. Как должны разделить между собой эти деньги первые два рыбака?

**№ 1.19.** Условие: Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения. Афродита: «Я самая прекрасная. Гера не самая прекрасная». Афина: «Афродита не самая прекрасная. Я самая прекрасная». Гера: «Я самая прекрасная». Афина: «Я самая прекрасная». Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто из богинь прекраснее?

**№ 1.20.** Условие: В синем, красном и желтом горшках на подоконнике в ряд растут красная герань, синяя незабудка и желтая лилия. Известно, что ни один цветок не растет в горшке своего цвета. Лилия растет правее всех, а в центре нет ничего красного. Определите, в каком порядке растут цветы и какого цвета у них горшки.

**№ 1.21.** Условие: В одном городе кто-то угнал машину у градоначальника. Полиция задержала троих человек: Джона, Джека и Джо. Полиции было известно, что один из них — лжец, один — всегда говорит правду, а про третьего точно неизвестно, говорит ли он правду или ложь. Полиция также знала, что один из них угнал машину, и что этот человек всегда говорит правду. Три человека сказали следующее:

Джон: Я не виновен. Джек: Он говорит истинную правду.

Джо: Я угнал машину.

Кто угнал машину и кто лжец?

**№ 1.22.** Условие: Живут-поживают пять зайчат: Попрыгунчик, Ушастик, Тишка, Зайка, Беляк, и у каждого есть мячик. Цвета мячиков такие: синий, зеленый, красный, желтый и оранжевый. У Ушастика мячик желтого цвета, а у Зайки не зеленый, не синий и не красный. У Попрыгунчика был бы синий мячик, если бы у беляка был зеленый мячик, но у беляка мячик другого цвета. Беляк не любит игрушки синего цвета. У кого какой мячик?

**№ 1.23.** Условие: Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Дедка, Бабка, Внучка, Жучка и Кошка вместе с Мышкой могут вытащить Репку, а без Мышки — не могут. Сколько надо позвать Мышек, чтобы они смогли сами вытащить Репку?

**№ 1.24.** Условие: В озере растут лотосы. За сутки каждый лотос делится пополам, и вместо одного лотоса появляются два. Ещё через сутки каждый из получившихся лотосов делится пополам и так далее. Через 30 суток озеро полностью покрылось лотосами. Через какое время озеро было заполнено наполовину?

**№ 1.25.** Условие: Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И, наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому времени имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько было фантиков у каждого вначале?

**№ 1.26.** Условие: Поставьте скобки в выражении $6{\cdot}8+20:4-2$ так, чтобы значение выражения было равно 58.

**№ 1.27.** Условие: Найти сумму всех нечётных чисел от 1 до 2011, включая 1 и 2011.

## 2. Взвешивание и переливание.

**№ 2.1.** Условие: В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

**№ 2.2**. Условие: Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить 4 литра с помощью двух пустых бидонов: трехлитрового и пятилитрового.

**№ 2.3.** Условие: Золотоискатель Джек добыл 9 кг песка. Сможет ли он за три взвешивания отмерить 2 кг песка с помощью двухчашечных весов с двумя гирями – 200 г и 50 г?

**№ 2.4.** Условие: На плохо отрегулированных весах бабушка взвесила два пакета сахарного песку- получилось 500 г и 300 г. Когда же она взвесила на тех же весах оба пакета вместе, то получилось 900 г. Определите по этим данным вес каждого пакета.

**№ 2.5.** Условие: Имеется стакан кофе и стакан молока. Ложку молока перелили в кофе, полученную смесь тщательно перемешали. Ложку смеси перелили обратно в молоко. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?

**№ 2.6.** Условие: Дядя Фёдор собрался ехать к родителям в гости и попросил кота Матроскина 4 л простоквашинского молока. А у Матроскина только 2 пустых бидона: трёхлитровый и пятилитровый. И восьмилитровое ведро, наполненное молоком. Как Матроскину отлить 4 литра молока с помощью имеющихся сосудов?

**№ 2.7.** Условие: а) Есть 27 монет. Известно, что одна из них фальшивая (по весу тяжелее настоящих). Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

б) Можно ли определить фальшивую монету за три взвешивания, если монет 25?

**№ 2.8.** Условие: Можно ли разлить 50 литров бензина по трём бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а после переливания 26 литров из первого бака в третий в третьем баке стало столько же бензина, сколько во втором?

**№ 2.9.** Условие: Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить 4 литра с помощью двух пустых бидонов: трехлитрового и пятилитрового.

**№ 2.10.** Условие: Известно, что среди ста монет имеется ровно одна фальшивая (отличается по весу от настоящих). С помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определите, легче или тяжелее фальшивая монета настоящей (находить ее не надо!).

**№ 2.11.** Условие: Из 9 монет одна фальшивая, она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

**№ 2.12.** Условие: Имеется 68 монет, причем известно, что любые две монеты различаются по весу. Как за 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самую тяжелую и самую легкую монеты?

**№ 2.13.** Условие: Последовательность переливаний путем «прогадания»

Используя сосуды на 3 л и на 5л, налить из крана в 5-литровый сосуд 4 л.

**№ 2.14.** Условие: Мила, Кузя, Пчеленок и Лунтик играли в прятки возле старого дуба. В это время баба Капа решила сварить вишнёвое варенье, и для этого ей понадобилось 6 литров вишни. Она попросила ребят помочь ей собрать ягоды, но у нее было только два ведерка: одно на 8 литров, второе на 5 литров. Как ребятам собрать ровно 6 литров вишен?

**№ 2.15.** Условие: Баба Капа и Дед Шер собрали на зиму запас меда. Дед Шер решил разделить его пополам, чтобы одну часть меда съесть до зимних морозов, а вторую – потом. Весь мед находится в бочке на 12 литров и у него есть две пустых банки на 5 и 9 литров. Может ли он разделить мед так, как задумал?

**№ 2.16.** Условие: Кузя и Лунтик получили поручение от паука Шнюка – принести 7 литров воды, чтобы паук смог сварить вкусный компот. Но у Кузи было ведро на 5 литров, а у Лунтика – на 8 литров. Могут ли они принести ровно 7 литров воды, чтобы паук Шнюк сварил компот?

**№ 2.17.** Условие: Милу и Пчеленка гусеницы Пупсень и Вупсень угостили шоколадными конфетами и одну конфету поменяли на камушек. Как за два взвешивания на чашечках весах без гирь определить в какой обертке камушек, если он тяжелее конфеты и у ребят всего 9 конфет?

**№ 2.18.** Условие: Есть три бидона ёмкостью 14 л, 9 л и 5 л. В большом бидоне 14 литров молока, остальные бидоны пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?

**№ 2.19.** Условие: Известно что среди 100 монет имеется ровно одна фальшивая( отличается по весу от настоящий) С помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определите легче или тяжелее фальшивая монета настоящих (находить ее не надо).

**№ 2.20.** Условие: Однажды Винни-Пух захотел полакомиться медом и пошел к пчелам в гости. По дороге нарвал букет цветов, чтобы подарить труженицам пчелкам. Пчелки очень обрадовались, увидев мишку с букетом цветов, и сказали: «У нас есть большая бочка с медом. Мы дадим тебе меда, если ты сможешь с помощью двух сосудов вместимостью 3 л и 5 л налить себе 4 л!» Винни-Пух долго думал, но все-таки смог решить задачку. Как он это сделал?

**№ 2.21.** Условие: Среди 100 одинаковых на вид монет есть несколько фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие - тоже, фальшивая монета легче настоящей. Имеются также весы (с двумя чашами без стрелки), на каждой чашке умещается только по одной монете. При этом весы слегка испорчены: если монеты разного веса, перевешивает более тяжёлая монета, а если одинакового - перевесить может любая чашка. Как с помощью этих весов найти хотя бы одну фальшивую монету?

**№ 2.22.** Условие: У Буратино есть 27 золотых монет. Но известно, кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определить фальшивую монету?

**№ 2.23.** Условие: У Буратино есть 27 золотых монет. Но известно, что Кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определить фальшивую монету?

**№ 2.24.** Условие: В пакете содержится 9 кг крупы. Требуется при помощи чашечных весов с гирями в 50 и 200 г распределить всю крупу по двум пакетам: в один — 2 кг, в другой — 7 кг. При этом разрешается произвести только 3 взвешивания.

**№ 2.25.** Условие: Как разложить на 3 равные кучки 1002 гирьки, имеющие вес 1, 2, 3, …, 1002 г?

**№ 2.26.** Условие: Однажды Винни-Пух захотел полакомиться медом и пошел к пчелам в гости. По дороге нарвал букет цветов, чтобы подарить труженицам пчелкам. Пчелки очень обрадовались, увидев мишку с букетом цветов, и сказали: «У нас есть большая бочка с медом. Мы дадим тебе меда, если ты сможешь с помощью двух сосудов вместимостью 3 л и 5 л налить себе 4 л!» Винни-Пух долго думал, но все-таки смог решить задачку. Как он это сделал?

## 3. Задачи на числовые зависимости.

**№ 3.1.** Условие: Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти искомое двузначное число.

**№ 3.2.** Условие: Ваня задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 9, умножим на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумал Ваня?

**№ 3.3.** Условие: Найти двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

**№ 3.4.** Условие: Может ли быть точным квадратом число, состоящее из: а) двоек и восьмерок; б) трехсот единиц и некоторого числа нулей?

**№ 3.5.** Условие: Расставьте в записи 4 • 12 + 18 : 6 + 3 скобки так, чтобы получилось число 50.

**№ 3.6.** Условие: 30 пирожных стоят на 3 р. дороже, чем 40 пирожков. Те же 30 пирожных стоят на 2 р. 10 к. дороже, чем 50 таких же пирожков. Сколько стоят одно пирожное и один пирожок?

**№ 3.7.** Условие: В несколько одинаковых автобусах 115 человек поехали на озеро, 138 - в лес. Все места в автобусах были заняты, и всем хватило места. Сколько было заказано автобусов и сколько мест в каждом автобусе?

**№ 3.8.** Условие: Сумма трех чисел равна их произведению. Эти числа различные и однозначные. Найти эти числа.

**№ 3.9.** Условие: Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц; по ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего и получил произведение, на 2808 меньшее истинного. Чему равно истинное произведение?

**№ 3.10.** Условие: Замените значки * в выражении 13*11*9*7*5*3*1 = 1 на знаки + и – так, чтобы получилось верное равенство.

**№ 3.11.** Условие: Квадрат натурального числа состоит из цифр 0; 2; 3; 5. Найти его.

**№ 3.12**. Условие: Когда солдаты строились в колонну по 4, по 5 или по 6 человек, то каждый раз один оставался лишним, а когда построились в колонну по 7, лишних не осталось. Каким могло быть наименьшее количество солдат?

**№ 3.13.** Условие: Саша написал на листе бумаги число 10. Пятнадцать одноклассников передают лист друг другу, и каждый либо прибавляет к числу, либо вычитает из него единицу. Может ли в результате получиться нуль?

**№ 3.14.** Условие: Знайка задумал несколько целых чисел и сообщил их Незнайке. В интервью газете «Жёлтый листок» Незнайка сказал: «Знайка назвал мне три числа. Их сумма равна 201, а произведение равно 30030». Докажите, что Незнайка соврал.

**№ 3.15.** Условие: Сколько надо поставить знаков «плюс» между цифрами числа 987 654 321, чтобы в сумме получилось 99?

**№ 3.16.** Условие: Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

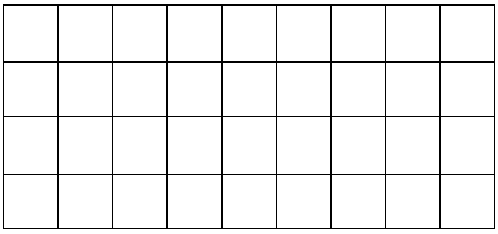
**№ 3.17.** Условие: Остаток от деления 100 на некоторое число равен 4. При делении 90 на это же число в остатке получается 18. На какое число делили?

**№ 3.18.** Условие: Какую цифру нужно приписать к числу 97 справа и слева, чтобы полученное число делилось на 27?

**№ 3.19.** Условие: Телёнок и поросёнок весят столько, сколько 5 ящиков. Поросёнок весит столько, сколько 4 кошки; 2 кошки и поросёнок весят столько, сколько 3 ящика. Сколько кошек уравновесят телёнка?

## 4. Разрезания. Замощения. Раскраски.

**№ 4.1.** Условие: Разрежьте прямоугольник размером 4×9 на две части с таким расчетом, чтобы в результате из них можно было сложить квадрат.

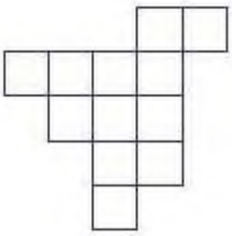


**№ 4.2.** Условие: Можно ли доску 5 x 5 заполнить костяшками домино размером 1 x 2?

**№ 4.3.** Условие: Можно ли разрезать шахматную доску без двух противоположных угловых клеток на прямоугольники, содержащие по 2 клетки?

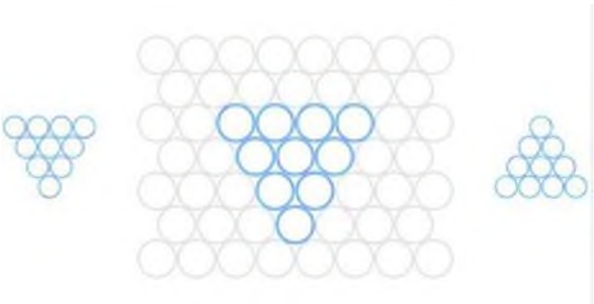
**№ 4.4.** Условие: Как разрезать прямоугольник, длина которого 16 см, а ширина 9 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат?

**№ 4.5.** Условие: Разрежьте фигуру на 3 равные части.

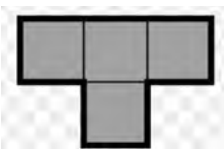


**№ 4.6.** Условие: На клетчатой бумаге отмечены произвольно n клеток. Доказать, что из них всегда можно выбрать не менее, чем n/4 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом. (Соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

**№ 4.7.** Условие: Десять кружочков расположили так, как на рисунке слева. Переложите только три кружка так, чтобы получилась фигура на рисунке справа.

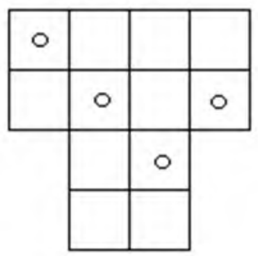


**№ 4.8.** Условие: Можно ли шахматную доску, размером 8 на 8, закрасить фигурами, как на рисунке. Если это возможно, сколько таких фигур необходимо?

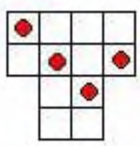


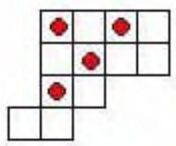
**№ 4.9.** Условие: Можно ли разрезать квадрат клетчатой бумаги размером 4× 4 на один пьедестал, один квадрат, один столбик и один зигзаг?

**№ 4.10.** Условие: Разрежьте фигуру на рисунке на две равные части по линиям сетки, причем в каждой из частей должен быть кружок.



**№ 4.11.** Условие: Разрежьте фигуры, изображенные на рисунке, на две равные части по линиям сетки так, чтобы в каждой из частей был кружок.





**№ 4.12.** Условие: Взяли квадрат клетчатой бумаги размером 8×8, отрезали от него две клетки (левую нижнюю и правую верхнюю). Можно ли полученную фигуру полностью покрыть «доминошками» — прямоугольниками 1 × 2?

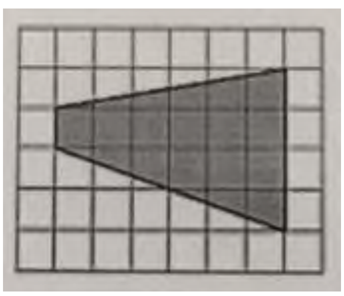
**№ 4.13.** Условие: В каждой клетке доски 5×5 клеток сидел жук. Затем каждый жук переполз на соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась хотя бы одна пустая клетка.

**№ 4.14.** Условие: Фигурка из двух одинаковых деталей

Какую из фигурок А — Е нельзя составить из двух одинаковых деталей, изображенных справа?

Детали нельзя переворачивать тыльной стороной вверх.

**№ 4.15.** Условие: На клетчатой бумаге с клетками 1x1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



## 5. Задачи на движение.

**№ 5.1.** Условие: Инженер ежедневно приезжал на станцию в одно и то же время , и в то же время за ним подъезжала машина, на которой он ехал на завод. Однажды он приехал на станцию на 55 мин раньше обычного. Сразу пошел навстречу машине и приехал на завод на 10 мин раньше, чем обычно. Во сколько раз скорость инженера меньше скорости машины?

**№ 5.2.** Условие: Кенгуру мама прыгает за 1 секунду на 3 метра, а ее маленький сынишка прыгает на 1 метр за половину секунды. Они одновременно стартовали от бассейна к эвкалипту по прямой. Сколько секунд мама будет ждать сына под деревом, если расстояние от бассейна до дерева 240 метров.

**№ 5.3.** Условие: Турист поднимался в гору 5 часов, проходя каждый час 3 км. На обратном пути он увеличил скорость на 2 км/ч. Сколько часов потребовалось туристу на обратный путь?

**№ 5.4.** Условие: По дереву ползет гусеница. За день она поднимается на 6 метров, а ночью опускается на 4 метра. За сколько дней она доползет до вершины, если высота дерева 14 метров?

**№ 5.5.** Условие: Поезд длиной 1 км идет со скоростью 60 км/ч. Сколько времени потребуется поезду для прохождения тоннеля длиной в 1 км?

**№ 5.6.** Условие: Ваня и Петя участвуют в велогонке. Они стартуют вместе и едут по кругу в одном направлении. Ваня проезжает весь круг за 6 мин, а Петя – за 4 мин. Через сколько минут после старта Петя догонит Ваню?

**№ 5.7.** Условие: Между Лунтиком и Кузей 6 метров. Когда Лунтик догонит Кузю, если Лунтик бежит со скоростью 8 м/мин, а Кузя – 7 м/мин.

**№ 5.8.** Условие: Мила летит из дома до школы 40 минут, а Пчеленок – 30 минут. Через сколько Пчеленок догонит Милу, если он вылетел на 6 минут позже Милы и их домики расположены в одном дереве.

**№ 5.9.** Условие: Могут ли три человека преодолеть расстояние в 60 км за 3 часа, если у них в распоряжении имеется двухместный мотоцикл? Скорость мотоцикла 50 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч.

**№ 5.10.** Условие: Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 8 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 114 км/ч, и через 20 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км /ч.

**№ 5.11.** Условие: Расстояние между городами А и В 720км. Из А в В вышел скорый поезд со скоростью 80 км /ч. Через 2 часа навстречу ему из В в А вышел пассажирский поезд со скоростью 60 км /ч. Через сколько часов после выхода пассажирского поезда эти поезда встретятся?

**№ 5.12.** Условие: Если кенгуру научится прыгать в 1,5 раза дальше, чем умеет, ему понадобится ровно 6 прыжков, чтобы добраться до тенистого дерева. За сколько прыжков кенгуру может это сделать сейчас?

**№ 5.13.** Условие: Буратино сел в поезд. Проехав половину всего пути, он лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути Буратино проехал бодрствующим?

**№ 5.14.** Условие: Собака преследует зайца. который находится на расстоянии 40 своих прыжков впереди собаки. Собака делает 7 прыжков, в то время как заяц делает их 9, но 3 прыжка собаки равны 5 прыжкам зайца. Сколько прыжков надо сделать собаке, чтобы догнать зайца?

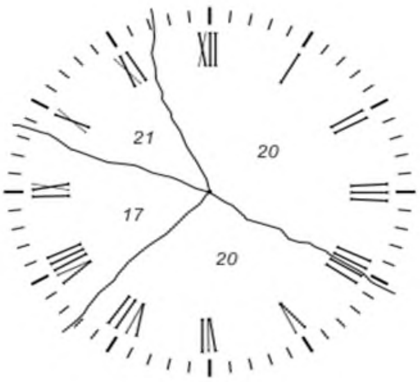
### 6. Задачи на циферблате.

**№ 6. 1.** Условие: Сумма всех чисел, изображенных на циферблате часов, равна 78. Раздели циферблат двумя прямыми линиями на три части так, чтобы сумма чисел в каждой части была одинаковой.

**№ 6.2.** Условие: Разбейте циферблат часов с помощью отрезков на три части таким образом, чтобы сумма чисел в каждой из этих частей была одной и той же.

**№ 6.3.** Условие: Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 5 часов 30 мин?

**№ 6.4.** Условие: В музее я видел старинные часы с римскими цифрами на циферблате, причём вместо знакомой нам записи числа четыре (IV) стояли четыре палочки (IIII). Трещины, образовавшиеся на циферблате, делили его на 4 части, как изображено на рисунке:




Суммы чисел в каждой части оказались неодинаковыми: в одной — 21, в другой — 20, третьей — 20, в четвёртой — 17.

Я заметил, что при несколько ином расположении трещин сумма чисел в каждой из четырёх частей циферблата равнялась бы 20. При новом расположении трещин они могут и не проходить через центр циферблата. Найдите это новое расположение трещин.

**№ 6.5.** Условие: Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые вновь совпадут часовая и минутная стрелки?

**№ 6.6.** Условие: Найти угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч 38 мин.

**№ 6.7.** Условие: Будильник спешит на 9 минут в сутки. Ложась спать в 22:00, Юля установила на нём точное время. На какое время ей нужно завести звонок, чтобы будильник зазвенел ровно в 6:00?

**№ 6.8.** Условие: Вова носит электронные часы, которые показывают время в формате ЧЧ:ММ:СС, то есть в 14 часов 23 минуты 57 секунд они покажут 14:23:57. Вова заинтересовался, каких секунд в сутках больше: тех, когда часы показывают, что минут больше, чем секунд (например, 04:45:14), или тех, когда минут меньше, чем секунд (например, 23:37:59). А как думаете вы?

**№ 6.9.** Условие: .Разделите циферблат часов на равные ( по сумме чисел) части.

Приведите все способы.

**№ 6.10.** Условие: Один будильник спешит на 26 минут и показывает 7 часов 50 минут. Какое время показывает другой будильник, который отстает на 15 минут?

**№ 6.11.** Условие: Сумма всех чисел, изображенных на циферблате часов, равна 78. Раздели циферблат двумя прямыми линиями на три части так, чтобы сумма чисел в каждой части была одинаковой.

**№ 6.12.** Условие: В 6 часов, наоборот, обе стрелки направлены в противоположные стороны (рис. 39). Но только ли в 6часов это бывает, или же есть и другие моменты, когда стрелки так расположены?

7. **Задачи – ребусы.**

**№ 7.1.** Условие: 9 8 7 6 5 = 0. Проставить знаки действия и скобки.

**№ 7.2.** Условие:  Даны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Часть из них расставлена по клеткам. Расставьте остальные числа так, чтобы в любом направление в сумме получалось 15.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | |
| | 5 | |
| | 1 | |

**№ 7.3**. Условие: Впишите в пустые клетки недостающие числа от 1 до 16 так, чтобы в сумме по всем столбцам, строкам и обеим диагоналям получилось число 34

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| | 13 | 3 | |
| | | 6 | 9 |
| | 1 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| | 13 | 11 | |
| | | 6 | 9 |
| | 1 | | |

**№ 7.4.** Условие: Расшифруй запись (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры):

СИНИЦА + СИНИЦА = ПТИЧКИ.

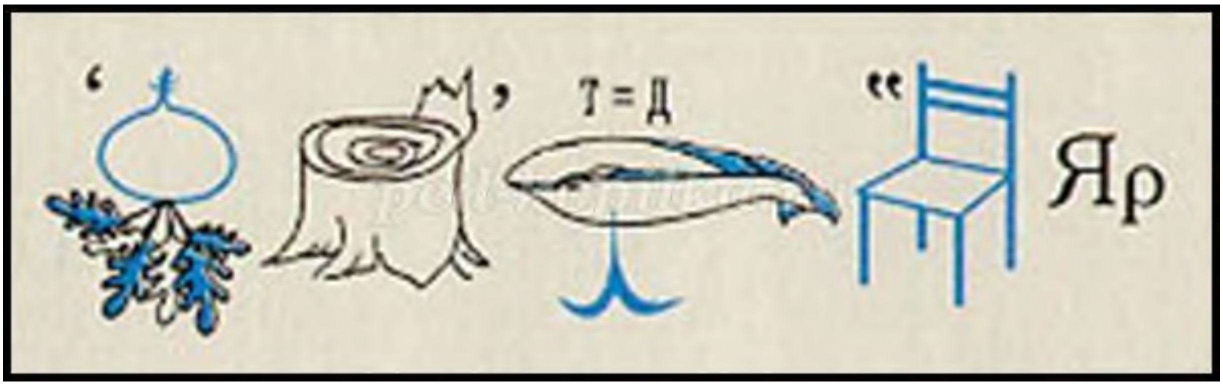
(Пример лучше записать в столбик.)

**№ 7.5.** Условие: КОКА + КОКА = ВОДА .

**№ 7.6.** Условие: ОДИН + ОДИН = МНОГО .

**№ 7.7.** Условие:


**№ 7.8.** Условие:

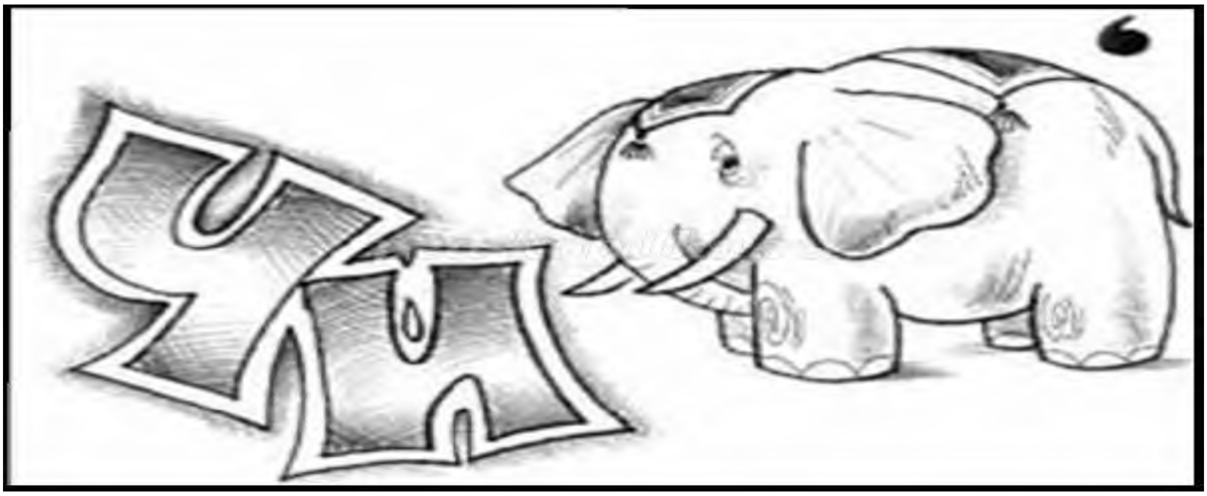



**№ 7.9.** Условие:

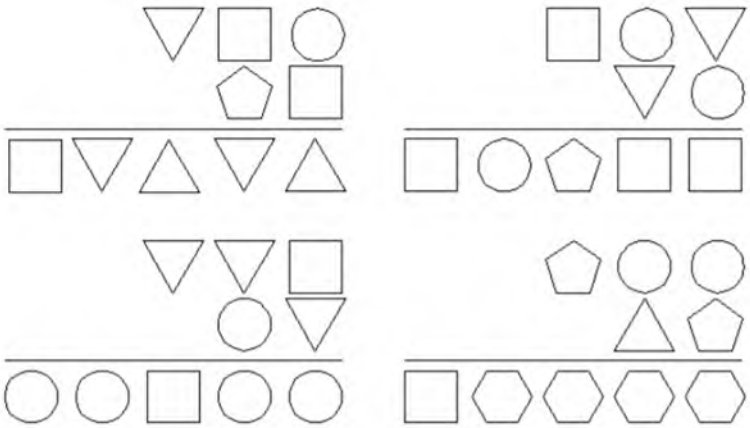

**№ 7.10.** Условие:


**№ 7.11.** Условие:


**№ 7.12.** Условие:



**№ 7.13.** Условие: Одинаковым фигурам на рисунке соответствуют одинаковые цифры. Найдите эти цифры, если на рисунке представлено умножение.



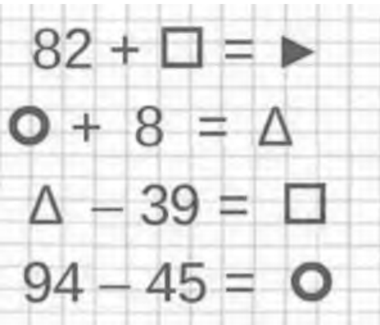
**№ 7.14.** Условие:  Решите ребус:

КРУГ + ШАР = СФЕРА

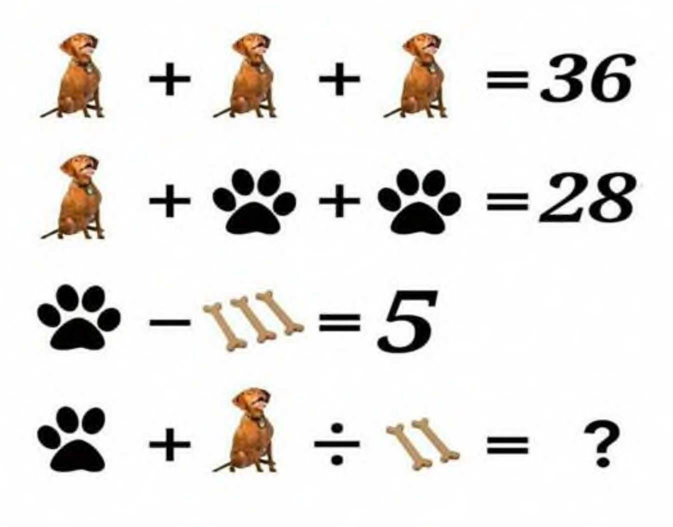
**№ 7.15.** Условие: Решите ребус:

РОЗА + ОЗА + ЗА + А = 2000.

**№ 7.16.** Условие: Восстанови цепочку:




**№ 7.17.** Условие:




**№ 7.18.** Условие: Решите ребус, если известно, что наибольшая цифра в числе СИЛЕН, равна 5.


**№ 7.19.** Условие: Какую цифру заменяет черный треугольник?

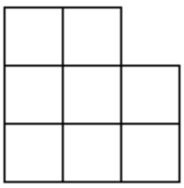
В примере на сложение:

► + ► + ○○ = Δ Δ Δ

различные фигурки заменяют различные цифры.

Какую цифру заменяет черный треугольник?

**№ 7.20.** Условие: Расставьте цифры 1, 2, 3, …, 8 в клетки неполного квадрата так, чтобы получить одинаковые суммы по горизонталям, вертикалям и большой диагонали.



**№ 7.21.** Условие: Найдите цифры, вместо которых стоят звездочки:

А) * 8 *
4 * 2
——-
7 * 0
* * *
* * * *
—————
* * * * 2 *

Б) найдите цифры, которые стоят вместо букв.

```
 МУХА | ХА
      |-----
 -ХА  | УХА
   КХ
  -АР
  УХА
 -УХА
    0
```

**8. Задачи на работу**

**№ 8.1.** Условие: Котенок Малыш может облизать себя с головы до кончика хвоста за полчаса, а кот Тоша может облизать Малыша за 5 минут. Себя Тоша способен помыть за 20 минут. Сколько времени придется трудиться Малышу, чтобы помыть Тошу?

# Глава 2. Олимпиадные задания для учащихся 6 классов.

1. **Задачи логического характера.**

**№ 1.1.** Условие: На некотором острове необычайно регулярный климат : по понедельникам и средам всегда идут дожди, по субботам - туман, зато в остальные дни - солнечно.

Утром какого дня недели нужно начать свой отдых группе туристов, если они хотят пробыть там 44 дня и захватить при этом как можно больше солнечных дней?

А - в понедельник; В - в среду; С - в четверг; D - в пятницу; Е - во вторник.

**№ 1.2.** Условие: На спортивные соревнования в ЛМШ ходили 220 школьников. При этом некоторые из них участвовали в чемпионатах, а остальные были зрителями. В легкоатлетической эстафете приняли участие 30 человек, в соревнованиях по волейболу – 26, пионерболу – 32, футболу – 31, шахматам – 28 и теннису – 36 человек. 53 школьника приняли участие более чем в одном соревновании; из них 24 школьника участвовали 3 или более раз, 9 школьников – не менее 4 раз и 3 школьника – даже 5 раз (в последнюю тройку входит и один чудак, который выступал во всех шести соревнованиях). Сколько из школьников были зрителями?

**№ 1.3.** Условие: Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским – 28, французским – 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским – 10, немецким и французским – 5, всеми тремя языками – 3. Сколько туристов не владеют ни одним языком?

**№ 1.4.** Условие: Каждый из трёх девочек: Вера, Надя и Люба увлекаются одним из видов рукоделия: шитьем, вязанием и макраме. Назовите увлечение каждый, если Вера не вяжет. Надя не занимается ни макраме, ни вязанием.

**№ 1.5.** Условие: В одном дворе живут пятеро друзей: Андрей, Борис, Владимир, Геннадий и Дмитрий. Каждый из них посещает одну из спортивных секций: футбольную, баскетбольную, волейбольную, бокс и плавания. О друзьях известно, что:

а) Борис и Геннадий не посещают футбольную секцию;

б) Андрей и Геннадий хотят записаться в баскетбольную секцию;

в) Борис и Дмитрий учится в одном классе с боксёром

г) Владимир, Борис и брат пловца летом отдыхали в одном оздоровительном лагере;

д) Андрей и Борис в свободное время любит играть в шахматы с волейболистом;

е) Владимир, Геннадий и пловец учиться в одном классе;

ж) Владимир и боксёр учиться в разных школах.

Какой секции занимается каждый из друзей?

**№ 1.6.** Условие: Три клоуна Бим, Бам и Бом вышли на арену в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

**№ 1.7.** Условие: С борта парохода был спущен стальной трап. Нижние 4 ступеньки трапа погружены в воду. Каждая ступенька имеет толщину в 5 см; расстояние между двумя соседними ступеньками составляет 30 см. Начался прилив, при котором уровень воды стал поднимается со скоростью 40 см в час. Как Вы считаете, сколько ступенек окажется под водой через 2 часа?

**№ 1.8.** Условие: Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном – просо, а в другом – мак, а в третьем – еще не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «*МАК*», «*ПРОСО*», «*СМЕСЬ*». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная надпись. Ученик феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствуют действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зернышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

**№ 1.9.** Условие: В одном городе кто-то угнал машину у градоначальника. Полиция задержала троих человек: Джона, Джека и Джо. Полиции было известно, что один из них - лжец, один – всегда говорит правду, а про третьего точно неизвестно, говорит ли он правду или ложь. Полиция также знала, что один из них угнал машину, и что этот человек всегда говорит правду. Три человека сказали следующее:

Джон: - Я не виновен.

Джек: - Он говорит истинную правду.

Джо: - Я угнал машину.

Кто угнал машину и кто лжец?

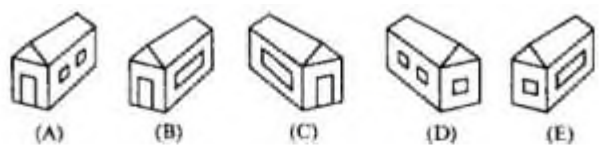
**№ 1.10.** Условие: У рассеянной хозяйки есть три ящика для рассады с надписью «Огурцы», «Цветы» и «Ромашки». Она посадила семена ромашек, огурцов и колокольчиков в эти ящики так, что все надписи оказались неверными. Что вырастет в ящике с надписью «Ромашки»?

**№ 1.11.** Условие: В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Галя, Коля, Валя и Таня. Сколько лет каждому ребенку, если известно, что одна девочка ходит в детский сад, Галя старше Коли и сумма лет Гали и Вали делится на три?

**№ 1.12.** Условие: Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – три дороги, из города С до пристани – две дороги. Туристы хотят проехать из города А через города В и С к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

**№ 1.13.** Условие: Из 40 учащихся 5 класса 32 ходят на кружок «Умелые руки», 21 посещают спортивную секцию, 15 учащихся ходят и на кружок, и на секцию. Сколько учащихся не ходят ни на этот кружок ни на эту секцию?

**№ 1.14.** Условие: Где домик Пятачка?




Домик Кролика нарисован 4 раза, а домик Пятачка только один раз.

Где домик Пятачка?

## 2. Задачи на числовые зависимости.

**№ 2.1.** Условие: Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на все четные числа от 2 до 18.

**№ 2.2.** Условие: Заместитель директора Вера Александровна организует проведение дня здоровья. 424 человека повезут на стадион “Спартак” для проведения эстафет, а 477 человек – в плавательный бассейн с морской водой. Для перевозки нужно заказать автобусы. Перевозчик имеет автобусы с одинаковым количеством мест, все места должны быть заняты. Сколько автобусов надо заказать и сколько пассажиров будет в каждом автобусе?

**№ 2.3.** Условие: Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

**№ 2.4.** Условие: Крестьянин попросил взять у царя одно яблоко из его сада. Царь разрешил. Пошел крестьянин к саду и водит: весь сад огражден тройным забором, имеет одни ворота, вход в которые охраняет сторож. Подошел крестьянин к Первову сторожу и говорит: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». На что сторож ему сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что возьмёшь и ещё одно». Эти же слова повторили крестьянину 2 и 3 сторожа, охранявшие другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после того, как он отдаст положенную часть 3 сторожам, у него осталось одно яблоко?

**№ 2.5.** Условие: Три рыбака решили сообща сварить на костре уху. Первый дал два окуня, второй четыре, а третий рыбак внес свою долю деньгами, дав 60 рублей. Как должны разделить между собой эти деньги первые два рыбака?

**№ 2.6.** Условие: Может ли крестьянин перевезти через реку волка, козу и капусту, если в лодку вместе с ним помещается только или волк, или коза, или капуста, причем нельзя оставить без присмотра ни волка с козой, ни козу с капустой?

**№ 2.7.** Условие: Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти искомое двузначное число.

**№ 2.8.** Условие: Ученику надо было умножить 78 на двузначное число ,в котором цифра десятков в 3 раза больше цифры единиц . По ошибке он переставил цифры во втором множителе и получил произведение, которое на 2808 меньше истинного. Найдите второй множитель.

**№ 2.9.** Условие: Известно, что число КУБ - является кубом некоторого числа, а БУК - простое число. Найдите числа, зашифрованные словами КУБ и БУК.

**№ 2.10.** Условие: Найдите все десятичные дроби вида $0,**5$, каждая из которых равна правильной несократимой дроби со знаменателем 8.

**№ 2.11.** Условие: Автобусный билет будем считать счастливым, если между его цифрами можно в нужных местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет N123456?

**№ 2.12.** Условие: Восстановите последовательность чисел и найдите ее сумму: 1+2+3+….+75+76+77.

**№ 2.13.** Условие: Используя только знаки математических действий и скобки, изобразите тысячу шестью пятёрками.

**№ 2.14.** Условие: Мальвина велела Буратино умножить число на 4 и к результату прибавить 15, а Буратино умножил число на 15 и потом прибавил 4, однако, ответ получился верный. Какое это было число?

**№ 2.15.** Условие: На доске написаны в строку 2011 целых числа. Доказать, что если одно из них можно стереть, то сумма оставшихся будет четной. Верно ли это утверждение для 2012 чисел?

**№ 2.16.** Условие: Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает в остатке 6, а при делении на 9 остаток равен 8.

**№ 2.17.** Условие: Над имеющимся числом разрешается производить два действия: умножить его на два или прибавить к нему 2. За какое минимальное число действий можно из единицы получить триста?

## 3. Полуинварианты.

**№ 3.1.** Условие: На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке и либо снимают, либо вешают платок. Может ли после ухода девочек остаться ровно 10 платков?

**№ 3.2.** Условие: В коробке 14 белых и 14 чёрных шариков. Какое минимальное количество шариков нужно достать из коробки, чтобы среди них наверняка оказалось 2 черных шарика?

**№ 3.3.** Условие: По периметру сада растет 20 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 33 ягоды?

**№ 3.4.** Условие: Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли в результата получится 45045?

**№ 3.5.** Условие: Можно ли разбить числа 1,2,3,…,30 на десять групп по три числа так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?

**№ 3.6.** Условие: В двух кучках лежат предметы, по 100 предметов в каждой. За ход разрешается взять произвольное количество предметов, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Найдите выигрышную стратегию для второго игрока.

**№ 3.7.** Условие: Круг разделили на 6 секторов, в каждом лежит селедка. За ход можно одну селедку передвинуть в соседний сектор. Можно ли собрать все селедки ровно за 20 ходов?

**№ 3.8.** Условие: По кругу стоят дети, у каждого из которых есть конфеты. По сигналу ведущего каждый передает половину своих конфет соседу справа (если у кого-то из детей нечетное число конфет, то ведущий сначала дает ему еще одну конфету). Докажите, что через какое-то число таких передач у всех детей конфет станет поровну.

**№ 3.9.** Условие: Квадрат размером $5 \times 5$ заполнен числами так, что произведение в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

**№ 3.10.** Условие: У нас в классе 35 человек. И можешь себе представить, каждый дружит ровно с 11 одноклассниками…

— Не может этого быть, — сразу ответил своему приятелю Витя Иванов, победитель математической олимпиады. Почему он так решил?

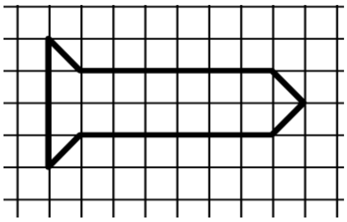
**№ 3.11.** Условие: Пекарь замесил тесто, из которого можно выпечь 20 одинаковых калачей или 25 одинаковых булочек. Сколько теста в замесе, если известно, что на один калач идет теста на 10 граммов больше, чем на одну булочку ?

**№ 3.12.** Условие: Коля и Вася живут в одном доме, на каждой лестничной клетке которого 4 квартиры. Коля живет на пятом этаже, в квартире 83, а Вася — на 3-ем этаже в квартире 169. Сколько этажей в доме ?

**№ 3.13.** Условие: Однажды Чёрт предложил бездельнику заработать. «Как только ты перейдёшь через этот мост, — сказал он, — твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 копейки». Бездельник согласился и …после третьего перехода остался без гроша. Сколько денег у него было сначала?

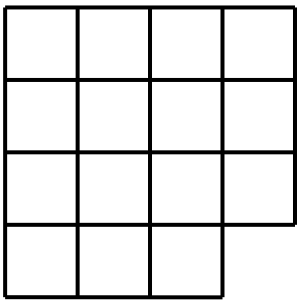
## 4. Разрезания. Замощения.

**№ 4.1.** Условие: Разрежьте ракету на 3 каких-то части и сложите из них квадрат.

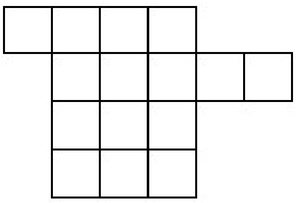


**№ 4.2.** Условие: Начертите прямоугольник размером 4х6 клеток. Покажите, как его «замостить» трехклеточными уголками так, чтобы никакие два из них не образовывали прямоугольник. («Замостить» – покрыть без наложений и свободных клеток.)

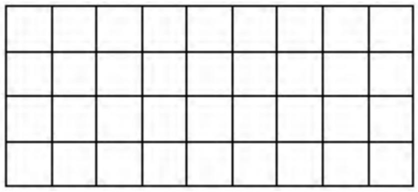
**№ 4.3.** Условие: Разрежьте фигуру на три равные части. Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равными и по площади, и по форме.



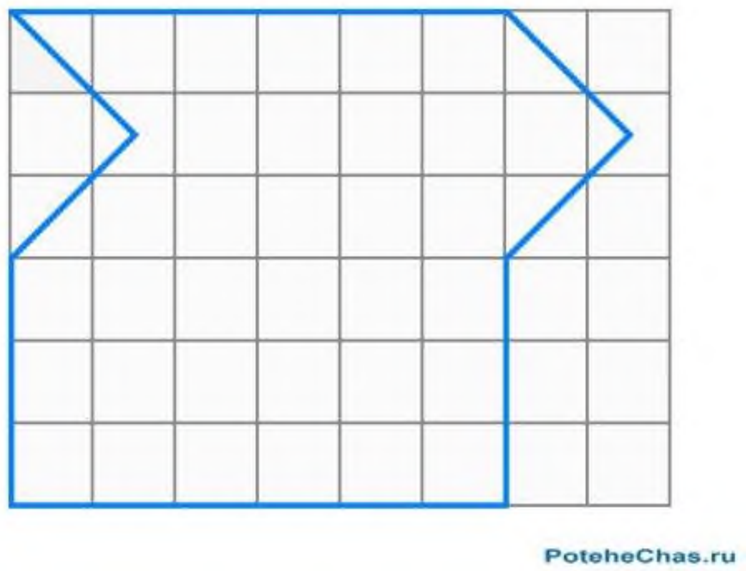
**№ 4.4.** Условие: Разрежьте изображённую фигуру на 3 равные по форме части:



**№ 4.5.** Условие: Разрежьте прямоугольник размером 4×9 на две части с таким расчетом, чтобы в результате из них можно было сложить квадрат.



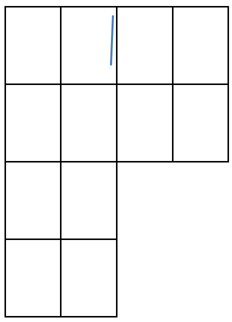
**№ 4.6.** Условие: Разрежьте фигуру на четыре одинаковых многоугольника отличающихся по своей форме от исходной фигуры.




**№ 4.7.** Условие: Докажите, что изображенную на рисунке фигуру нельзя разрезать на прямоугольники, состоящие из трех клеток.

**№ 4.8.** Условие: На части шахматной доски 3×3клетки в одной из клеток стоит конь. Можно ли им обойти все девять клеток этой части доски?

**№ 4.9.** Условие: 1.Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на четыре равные части



5. **Задачи на движение.**

**№ 5.1.** Условие: Не дождавшись трамвая на остановке А, мальчик пошел к следующей остановке В. Пройдя третью часть пути, он оглянулся и увидел, что к остановке А приближается трамвай. Если мальчик в этот момент побежит к остановке А или к остановке В, то он прибежит к каждой из них одновременно с приходом туда трамвая. Найдите скорость бега мальчика, считая ее постоянной (временем пребывания трамвая на остановке А пренебречь), если скорость трамвая равна 30 км/ч.

**№ 5.2.** Условие: Поезд проходит мимо платформы за 32 секунды. За сколько секунд поезд проедет мимо неподвижного наблюдателя, если длина поезда равна длине платформы?

**№ 5.3.** Условие: Проехав половину всего пути, пассажир лег спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир бодрствовал?

**№ 5.4.** Условие: Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин все перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

**№ 5.5.** Условие: 1.Ваня проехал на велосипеде от дома до деревни, в которой живет его бабушка, на 2ч 45 мин быстрее, чем Петя прошел этот же путь пешком. Каково расстояние от деревни бабушки до дома мальчиков, если скорость Вани на велосипеде 15 км/ч, а Пети пешком – 4 км/ч?

**№ 5.6.** Условие: Кот Матроскин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно на самом деле ко Матроскин все перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте - 100 секунд. С какой скоростью (в метрах в минуту) бегает кот Матроскин?

**№ 5.7**. Условие: Пройдя половину пути, автомобиль увеличил скорость движения на 25% и прибыл в конечный путь назначения на полчаса раньше. Сколько времени автомобиль находился в пути?

**№ 5.8.** Условие: В данный момент расстояние между двумя таксистами 345 км. На каком расстоянии будут находиться таксисты через два часа, если скорость одного 72 км /ч., а другого -68 км /ч., и они выезжают навстречу друг другу одновременно?

**№ 5.9.** Условие: Расстояние между городами А и В 720км. Из А в В вышел скорый поезд со скоростью 80 км /ч. Через 2 часа навстречу ему из В в А вышел пассажирский поезд со скоростью 60 км /ч. Через сколько часов после выхода пассажирского поезда эти поезда встретятся?

**№ 5.10.** Условие: Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. Сколько километров она пробежала?

**№ 5.11.** Условие: Могут ли три человека преодолеть расстояние в 60 км за 3 часа, если у них в распоряжении имеется двухместный мотоцикл? Скорость мотоцикла 50 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч.

**№ 5.12.** Условие: Человек (В) сходит с мотоцикла и идёт пешком. Он проходит 5 км. Человек (С) идёт пешком и проходит ещё 5 км. Человек (А) возвращается на 40 км и ждёт человека (С) там.

## 6. Задачи на проценты.

**№ 6.1**. Условие: Маша и Саша приготовили мыльный раствор для мыльных пузырей. В стакане у Маши было 140 гр. 10% -го мыльного раствора, а в стакане у Саши было 60 гр. 30% -го мыльного раствора. У Маши пузыри не получались, тогда Саша предложил перелить содержимое из двух стаканов в колбу. Смогут ли Маша и Саша получить мыльные пузыри из раствора, содержащегося в колбе, если для этого нужен 16% - ный раствор?

**№ 6.2.** Условие: Сторона квадрата увеличилась на 20%. На сколько процентов увеличился периметр квадрата и на сколько увеличилась площадь квадрата?

**№ 6.3.** Условие: Известно, что 2% положительного числа А больше, чем 3% положительного числа В. Что больше: 5% числа А или 7% числа В?

**№ 6.4.** Условие: При проверке влажности зерна она оказалась равной 16%. 200 кг зерна просушили, после чего зерно стало легче на 20 кг. Найти влажность зерна после просушки ( с точностью до 0,1%).

**№ 6.5.** Условие: Цена билета в театр выросла на 40%, а выручка снизилась на 16%. На сколько процентов уменьшилось число зрителей?

**№ 6.6.** Условие: Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха — уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

**№ 6.7.** Условие: У старшего брата на 25% больше денег, чем у младшего. Сколько процентов своих денег старший должен дать младшему, чтобы денег у них стало поровну?

**№ 6.8.** Условие: На какое натуральное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25 % частного?

**№ 6.9.** Условие: В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила девятки, третья – восьмерки, половина – семерки. Остальные работы были оценены ниже семерки. Сколько было таких ребят?

**№ 6.10.** Условие: Количество сливок, получаемых из молока, равно 21%. Сколько сливок получиться, если использовать 48 литров молока?

**№ 6.11.** Условие: На олимпиаде школьная команда набрала 72 очка. Сколько очков можно набрать на олимпиаде, если набранные командой очки составляют 80% из всех возможных?

**№ 6.12.** Условие: Влажность купленного арбуза составила 99%. В результате длительного хранения влажность снизилась до 98%. Как изменилась влажность арбуза?

**№ 6.13.** Условие: 1.В примере a*b+c*d, a увеличили на 20%, b уменьшили на 60%, c уменьшили на 68%, d увеличили на 50%. После этого пример решили и получили 96. Найдите a*b+c*d.

**№ 6.14.** Условие: Уровень воды в реке за февраль понизился на 25%, а за март повысился на 20%, за апрель снизился на 10%, а за май повысился на20%. На сколько процентов изменился уровень воды по сравнению с первоначальным значением?

## 7. Иллюстративные задачи

**№ 7.1.** Условие: Знак «?» замените словом :

| | |
|---|---|
| 351 | 151 |
| 1902503 | 3582853 |
| ОТКАЗ | ? |

**№ 7.2.** Условие: Знак «?» замените словом:

| | | |
|---|---|---|
| АВГУСТ | x + 5 = 8 | УСТАВ |
| 8052917 | x – 12 = 22 | ? |

## 8. Принцип Дирихле

**№ 8.1.** Условие: В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

**№ 8.2.** Условие: В Москве живет около 10 млн. жителей1 , на голове у каждого не более 150 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове.

**№ 8.3.** Условие: В первенстве по футболу участвуют 12 команд, каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

**№ 8.4.** Условие: В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка — точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

**№ 8.5. Условие:** В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

**№ 8.6.** Условие: 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

**№ 8.7.** Условие: Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

**№ 8.8.** Условие: Шестнадцать ребят собрали вместе 110 грибов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество грибов.

**№ 8.9.** Условие: На складе 25 ящиков с тремя разными сортами груш (в каждом ящике груши только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с грушами одного и того же сорта.

## 9. Задачи на работу

**№ 9.1.** Условие: Лене нужно 6 часов, чтобы вымыть полы во всем доме, Гриша и Миша пачкают каждый час 1/18 всех полов. Сколько времени понадобится Лене, чтобы привести полы в порядок, если к началу работы все полы были грязные?

**№ 9.2.** Условие: 7 волков съедают 7 баранов за 7 дней. За сколько дней 9 волков съедят 9 баранов?

**№ 9.3.** Условие: Четыре чёрные коровы и три рыжие дают за 5 дней столько молока, сколько три чёрные коровы и пять рыжих дают за 4 дня. У каких коров больше удои, у чёрных или у рыжих?

**№ 9.4.** Условие: Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?

# Глава 3. Олимпиадные задания для учащихся 7 классов.

1. **Задачи логического характера.**

**№ 1.1**. Условие: Андрей, Борис, Вадим и Геннадий заняли первые четыре места в соревновании по перетягиванию каната. На вопрос корреспондента, какое место занял каждый из них, было получено три ответа:

1) Андрей – первое, Борис – второе,

2) Андрей – второе, Геннадий – третье,

3) Вадим – второе, Геннадий – четвертое.

В каждом из этих ответов одна часть правдива, а вторая ложна. Кто занял какое место?

**№ 1.2.** Условие: Рабочий копал яму. На вопрос прохожего, какой глубины будет яма, которую он роет, рабочий ответил: «Мой рост 1 м 80 см. Когда я вырою яму до конца, то моя голова будет на столько ниже уровня земли, на сколько сейчас, когда я уже вырыл половину, она находится выше ее уровня». Какой глубины яму роет рабочий?

**№ 1.3.** Условие: В XIX-XX веках Россией правили 6 царей династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович, Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях после отца - сын. Как известно, последнего русского царя, погибшего в Екатеринбурге в 1918 году, звали Николаем. Найдите порядок правления этих царей.

**№ 1.4.** Условие: Из чисел А, В и С одно положительно, одно отрицательно и одно равно 0.

Известно, что $A = B (B – C)$.

Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно 0? Почему?

**№ 1.5.** Условие: Можно ли расположить в кружочках на рисунке натуральные числа от 1 до 11 так,

чтобы суммы трех чисел на каждом из пяти выходящих из центра отрезков равнялись одному и тому же числу А,

а суммы пяти чисел в вершинах внутреннего и внешнего пятиугольников равнялись одному и тому же числу В?

Если да, то как? Если нет, то почему?

**№ 1.6.** Условие: 6 рыбаков съели 6 судаков за 6 дней. За сколько дней 10 рыбаков съедят 10 судаков?

**№ 1.7.** Условие: Вася, Коля, Петя и Степа – ученики 4, 5, 6 и 7 классов, пошли по грибы Шестиклассник не нашел ни одного белого гриба, а Петя и ученик 4 класса нашли 8 штук. Вася и пятиклассник нашли много подосиновиков. И позвали Николая. Семиклассник, шестиклассник и Коля смеялись над Стёпой, сорвавшим мухомор. Кто в каком классе учится?

**№ 1.8.** Условие: Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

**№ 1.9.** Условие: Двое по очереди ломают шоколадку 5 × 8. За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

**№ 1.10.** Условие: Четверо друзей-шахматистов перед началом шахматного турнира обсуждали свои возможности претендовать на призовые места. Друзья были уверены, что они займут четыре первых места, но не знали, в какой последовательности. Вот что они говорили:

Сергей: «Если я не займу первое место, то Павел займет четвертое».

Павел: «Если Алексей не займет первое место, тогда Сергей выйдет на третье место».

Алексей: «У Сергея положение в турнирной таблице будет лучше, чем у Юрия».

Юрий: «Могу сказать только, что все мы займем разные места». Предположения друзей целиком оправдались. Кто какое место занял в шахматном турнире?

**№ 1.11.** Условие: Один сапфир и два топаза

ценней, чем изумруд в три раза.

А семь сапфиров и топаз

его ценнее в восемь раз.

Определить мы просим Вас,

сапфир ценнее иль топаз?

**№ 1.12.** Условие: В одном дворе живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик – младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.

**№ 1.13.** Условие: В классе всего 36 человек. Учащиеся посещают математический, физический и химический кружки, причем, математический кружок посещают 18 человек, физический — 14 человек, химический — 10 человек. Кроме того, известно, что все три кружка посещают 2 человека, математический и физический -8, математический и химический — 5, физический и химический — 3. Сколько учеников класса не посещают никаких кружков?

2. **Задачи на многочлены.**

**№ 2.1.** Условие: Разложите на множители $x^4+2010x^2+2009x+2010$.

**№ 2.2**. Условие: Решите уравнение: $(3x + 2)^4 = (3x – 4)^4$

**№ 2.3**. Условие: Целые числа $x, y, z$ таковы, что $xy + yz + xz = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является полным квадратом.

**№ 2.4.** Условие: Попарно различные рациональные числа $a, b, c$ удовлетворяют равенствам $a(b + c) + c = b( c + a) + a = c( a + b) + b$. Найдите произведение $abc$.

**№ 2.5.** Условие: Докажите, что при a=b+1 выполняется следующее тождество:

$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{16}+b^{16}) = a^{32} - b^{32}$.

**№ 2.6.** Условие: Делится ли значение выражения $a^2 - c^2 + b(2a + b)$ на значение выражения $a + b + c$, где $a, b, c$ – любые целые числа?

**№ 2.7.** Условие: Вычислите $3xyz – x^3-y^3-z^3$ ,если x=1293,y=715,z= -2008.

**№ 2.8.** Условие: Решить уравнение: $2 (x^2 + x + 1) – (x^2 + 3x – 12 )= x^2$.

**№ 2.9.** Условие: Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

## 3. Инварианты и делимость.

**№ 3.1.** Условие: На доске написаны числа от 1 до 1998. Разрешается за один ход стирать любые два числа и вместо них записывать их разность, пока не останется одно число. Может ли это число быть нулём?

**№ 3.2.** Условие: В трёх кучках лежат 1, 9 и 98 камней. За один ход разрешается из любых двух кучек взять по одному камню и переложить их в третью. Можно ли за несколько ходов собрать все камни в одной из кучек?

**№ 3.3.** Условие: В каждой вершине n-угольника стоит одно из чисел +1 или -1. На каждой стороне написано произведение чисел, стоящих на концах этой стороны. Оказалось, что сумма чисел на сторонах равна нулю. Докажите, что

1) n - четно,

2) n делится на 4.

**№ 3.4.** Условие: В стране Мульти-пульти выпущены в обращение банкноты в 43 сантика. Малыш и Карлсон, имея только такие банкноты, зашли в кафе. Карлсон заказал 5 стаканов газировки и 16 пирожков и заплатил за них без сдачи. Малыш заказал 3 стакана газировки и 1 пирожок. Докажите, что сколько бы ни стоили газировка и пирожки, Малыш тоже может расплатиться без сдачи (все цены в стране Мульти-Пульти - целые числа).

**№ 3.5.** Условие: Найти натуральное число A , если из трех следующих утверждений два верны, а одно -- неверно:

а) A + 51 есть точный квадрат,

б) последняя цифра числа A есть единица,

в) A - 38 есть точный квадрат.

**№ 3.6.** Условие: Произведение цифр трёхзначного числа равно 25. Найдите такие числа.

**№ 3.7.** Условие: Поставить вместо звёздочек такие цифры, чтобы число 32*35717* делилось на 72.

**№ 3.8.** Условие: В шестизначном числе зачеркнули одну цифру и получили пятизначное. Из исходного числа вычли это пятизначное число и получили 654321. Найдите исходное число.

**№ 3.9.** Условие: Даны натуральные числа aи b. Обязательно ли они оканчиваются на одну и ту же цифру, если известно, что: а) числа 2a+b и 2b+a оканчиваются на одну и ту же цифру; б) числа 3a+b и 3b+a оканчиваются на одну и ту же цифру?

**№ 3.10.** Условие: Отец и сын решили перемерить шагами расстояние между двумя деревьями, для чего отошли одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца – 70 см, сына – 56 см. Найти расстояние между этими деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз.

**№ 3.11.** Условие: Мальчик и девочка измеряли шагами расстояние 143 м, 20 раз их шаги совпадали. Шаг мальчика 65 см. Чему равна длина шага девочки?

**№ 3.12.** Условие: Подойдя к группке из островитян Остапа, Сидора и Прохора, вы спросили у Остапа: «Вы рыцарь или лжец?» Тот ответил, но так неразборчиво, что вы не смогли ничего понять, и пришлось переспрашивать у Сидора: «Что сказал Остап?» «Остап сказал, что он лжец», — ответил Сидор. «Не верьте Сидору! Он лжет!» — вмешался в разговор Прохор. Определите, кто из Сидора и Прохора рыцарь и кто лжец?

**№ 3.13.** Условие: Не ограничившись одним ответом, вы опросили всех аборигенов, собравшихся в порту, и все они ответили: «Все остальные собравшиеся —лжецы». Сколько рыцарей собралось в порту?

**№ 3.14.** Условие: О натуральном числе А получено 5 сообщений:

а) А — двузначное число, б) А делится на 5, в) А не больше 14, г) А является квадратом целого числа, д) А — нечетное число. Чему равно А, если известно, что четыре из этих сообщений истинны, а одно ложно?

**№ 3.15.** Условие: Расставьте скобки в записи 7· 9 + 12 : 3 – 2 так, чтобы значение данного выражения равнялось 23.

**№ 3.16.** Условие: Известный бизнесмен Андрей Крутой пришел в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100- долларовых купюр старого образца. Ему было выдано 999 купюр достоинством 1, 5 и 25 долларов. Докажите, что его обсчитали.

**№ 3.17.** Условие: Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

**№ 3.18.** Условие: На острове Невезения отменили понедельники: у них за воскресеньем сразу следует вторник. За последний год (то есть, с 15 декабря 2002 года по 14 декабря 2003 года) воскресенья на острове совпадали с нашими воскресеньями ровно восемь раз. Какой день недели на острове сегодня?

**№ 3.19.** Условие: Имеются три числа, которые можно заменять по следующим правилам: все числа $a, b, c$ стираются и вместо них записываются $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$. Можно ли чисел 101, 73, 125 получить 77, 79 и 83?

**№ 3.20.** Условие: X и Y – целые числа, такие, что $3x + 7y$ делится на $19$. Докажите, что $43x + 75y$ тоже делится на $19$.

**№ 3.21.** Условие: Докажите, что значение выражения $3^{n+2}$-$2^{n+2}$+$3^n$-$2^n$ при любом натуральном значении n кратно 10.

**№ 3.22.** Условие: Шахматный конь начинает свой маршрут из левого нижнего угла доски, а кончает его в правом верхнем углу. Может ли при этом конь побывать на всех полях доски в точности по одному разу?

### 4. Задачи на движение.

**№ 4.1.** Условие: Две точки начинают движение по окружности в одном направлении из общего старта с разной скоростью. При этом на всем пути скорости движения точек не изменяются. Через некоторое время, когда одна из точек проделала путь равный двум окружностям, они вновь встретились на старте и остановились. Какая скорость у первой точки, если известно то, что скорость второй 6 м/с и вторая точка проделала путь на одну окружность больше, чем первая.

**№ 4.2.** Условие: Турист, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что опоздает к поезду на 40 мин, если будет двигаться с прежней скоростью. Поэтому остальной путь он проходит со скоростью 4 км/ч и прибывает на станцию за 45 мин до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

**№ 4.3.** Условие: Остап Бендер поставил новые покрышки на автомобиль ``Антилопа Гну". Известно, что передние покрышки автомобиля выходят из строя через 25000 км, а задние - через 15000 км (спереди и сзади покрышки одинаковые, но задние изнашиваются сильнее). Через сколько километров Остап Бендер должен поменять эти покрышки местами, чтобы ``Антилопа Гну" прошла максимально возможное расстояние? Чему равно это расстояние?

**№ 4.4.** Условие: Автомобиль из А в В ехал со средней скоростью 50 км/ч., а обратно возвращался со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость?

**№ 4.5.** Условие: Две машины едут по трассе скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

**№ 4.6.** Условие: Счетчик автомобиля показывал 12921 км. Через два часа счетчик стал показывать число, которое одинаково читалось в обоих направлениях. С какой скоростью ехал автомобиль?

**№ 4.7.** Условие: Две машины едут по трассе скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

**№ 4.8.** Условие: На каждом километре между селами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой – расстояние до Рощино. Останавливаясь у каждого столба, Бобик заметил, что если сложить все цифры, записанные на обеих сторонах таблички, то получится 13. Найдите расстояние между селами.

**№ 4.9.** Условие: По дороге мимо наблюдателя проехали через равные промежутки времени автобус, мотоцикл и автомобиль. Мимо другого наблюдателя они проехали с такими же промежутками времени, но в другом порядке: автобус, автомобиль, мотоцикл. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля 60 км/ч, а мотоцикла – 30 км/ч.

**№ 4.10.** Условие: Дорога от школы до дома занимает у Пети 20 мин. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что оставил дома ручку. Петя знал, что если он продолжит путь в школу с той же скорость, то придет за 8 минут до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 мин. Какую часть пути он прошел?

**№ 4.11.** Условие: Петя, проезжая в трамвае, заметил Васю, который шёл пешком вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 секунд он вышел из вагона и отправился догонять Васю. Зная, что Петя шёл вдвое быстрее Васи и в 5 раз медленнее трамвая, определите, через сколько времени Петя догонит Васю.

**№ 4.12.** Условие: Поезд проходит мимо светофора за 5 с, а мимо платформы длиной 150метров за 15 с. Найдите длину поезда и его скорость.

**№ 4.13.** Условие: По кольцевой дороге курсирует с одинаковыми скоростями и равными интервалами по 12 мин несколько автобусов. Сколько автобусов надо добавить. Чтобы при той же скорости интервалы между автобусами уменьшили на $\frac{1}{5}$ ?

**№ 4.14.** Условие: Путешественник в первый день прошел 20% всего пути и 2 км. Во второй – прошел 50% остатка и ещё 1 км. В третий день – 25% оставшегося пути и ещё 3 км. Остальные 18 км пути он прошел в четвертый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?

**№ 4.15.** Условие: От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась вдвое медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползет обратно? У какой из мух выше средняя скорость движения?

**№ 4.16.** Условие: Скорость автомобиля по ровному участку на 5 км/ч меньше, чем скорость под гору, и на 15 км/ч больше, чем скорость в гору. Дорога из А в В идет в гору и равна 100 км. Определить скорость автомобиля по ровному участку, если расстояние от А до В и обратно он проехал за 1 ч 50 мин.

**№ 4.17.** Условие: Два тела, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 112 мин, а двигаясь в противоположных направлениях - через каждые 16 мин. Во втором случае расстояние между телами уменьшилось с 40 м до 26 м за 12 с. Сколько метров в минуту проходит каждое тело и какова длина окружности?

**№ 4.18.** Условие: Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

**№ 4.19.** Условие: Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 ч. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3 ч 10 минут, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч?

## 5. Задачи на проценты.

**№ 5.1.** Условие: Первое число равно 0,2, второе равно 0,3. Сколько процентов составляет первое число от суммы этих чисел? На сколько процентов первое число меньше второго и на сколько процентов второе больше первого?

**№ 5.2.** Условие: Найти возраст брата и возраст сестры, если 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на 2 года, а 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет.

**№ 5.3.** Условие: Две мастерские вместе должны отремонтировать по плану 18 моторов. Первая мастерская выполнила свой план на 120%, а вторая - на 125%. Сколько моторов отремонтировала каждая мастерская?

**№ 5.4.** Условие: Цена билета в театр выросла на 40%, а выручка снизилась на 16%. На сколько процентов уменьшилось число зрителей?

**№ 5.5.** Условие: В автобусе ехало не более 100 пассажиров, причём число сидящих пассажиров было в 2 раза меньше числа стоящих. На остановке из автобуса вышло 4 % всех пассажиров. Найдите число пассажиров, оставшихся в автобусе.

**№ 5.6.** Условие: Торговец продал книгу со скидкой 5% от назначенной цены и получил 14% прибыли. Сколько процентов прибыли планировал получить торговец при продаже товара?

**№ 5.7.** Условие: Смешали два раствора уксуса: первый массой 200 г, второй – 300 г. Концентрация первого раствора 9%, второго- 12%. Какова концентрация полученного раствора?

**№ 5.8.** Условие: Число *а* составляет 80% числа *в*, а число *с* составляет 140% числа *в*. Найдите числа *а, в, с*, если известно, что *с* больше *а* на 72.

**№ 5.9.** Условие: Собрали 100кг грибов. Оказалось, что их влажность составляет 99%. Когда грибы подсушили, влажность снизилась до 98%. Какой стала масса грибов после подсушивания?

**№ 5.10.** Условие: Часть жителей города умеет говорить только по-русски, часть – только по-узбекски и часть умеет говорить на обоих языках. По-узбекски говорят 85%, по-русски 75%. Сколько процентов жителей говорят на обоих языках?

**№ 5.11.** Условие: В тридесятом царстве живут драконы. У каждого дракона одна, две или три головы, а) Может ли у 40 % драконов быть 60 % голов?

**№ 5.12.** Условие: У Пети в бутылке было «Фанты» на 10% больше, чем у Васи. Петя отпил из своей бутылки 11% ее содержимого, а Вася из своей – 2% содержимого. У кого после этого осталось больше «Фанты»?

**№ 5.13.** Условие: Условие В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья — четвёрки, половина — тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?

**№ 5.14.** Условие: У Вани было некоторое количество печенья; он сколько-то съел, а потом к нему в гости пришла Таня, и оставшееся печенье они разделили поровну. Оказалось, что Ваня съел в пять раз больше печений, чем Таня. Какую долю от всего печенья Ваня съел к моменту Таниного прихода?

## 6. Геометрические олимпиадные задачи.

**№ 6.1.** Условие: Угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника равен 130°. Определите углы этого треугольника.

**№ 6.2.** Условие: Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы никакие два прямоугольника не имели более одной общей вершины.

**№ 6.3.** Условие: Дан угол и точка M внутри него.

Провести прямую через эту точку так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился данной точкой пополам.

**№ 6.4.** Условие: ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки AK = AC и BM = BC. Найдите угол KCM.

**№ 6.5.** Условие: Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

**№ 6.6.** Условие: Из прямоугольника размером 8 x 11 клеток требуется по линиям сетки вырезать несколько квадратов так, чтобы не было одинаковых квадратов. Какое наибольшее число квадратов можно вырезать?

**№ 6.7.** Условие: а) Имеется 9 палочек длины 1, 2, …, 9. Можно ли из них сложить равносторонний треугольник? (Палочки нельзя ломать, их можно прикладывать концами друг к другу; требуется использовать все палочки.) б) Аналогичная задача, если имеется 10 палочек длины 1, 2, …, 10.

**№ 6.8.** Условие: Существует ли 10-угольник, который можно разрезать на 5 треугольников?

**№ 6.9.** Условие: Дан равносторонний треугольник ABC. На продолжении стороны CB за точку B отмечена точка D, а на продолжении стороны AB за точку B – точка M так, что CD = BM. Доказать, что AD = DM.

**№ 6.10.** Условие: Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

**№ 6.11.** Условие: Треугольник ABC является прямоугольным с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки AK=AC и BM=BC. Найдите угол KCM.

**№ 6.12.** Условие: В прямоугольном треугольнике один из углов равен $30^0$ . Докажите, что отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через её середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

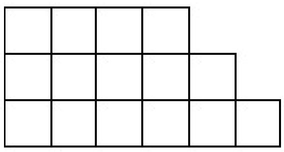
**№ 6.13.** Условие: Человек прикинул в уме, что он может выложить пол комнаты, имеющей квадратную форму, квадратной плиткой, и что ему не понадобится ни одну из них разрезать. Сначала, он положил плитки по краям комнаты, и на это у него ушло 56 плиток. Найдите, сколько всего ему надо иметь плиток, чтобы покрыть весь пол?

**№ 6.14.** Условие: С помощью циркуля и линейки разделить угол в 19° на 19 равных частей.

**№ 6.15.** Условие: Нарисовать треугольник, который можно разделить на 5 равных треугольников.

## 7. Разрезания. Замощения.

**№ 7.1.** Условие: Разрежьте изображенную фигуру (по границам клеток) на пять равных (одинаковые по форме и величине) частей.



**№ 7.2.** Условие: Вася и Митя играют в «морской бой» на поле размером 8х 8 по следующим правилам. Митя расставляет 16 одноклеточных кораблей так, чтобы они не соприкасались (даже углами). Каждым ходом Вася называет одну из клеток поля и, если на этой клетке стоит корабль, то корабль считается уничтоженным. Докажите, что независимо от расстановки кораблей Вася за 4 хода сможет уничтожить хотя бы один корабль.

**№ 7.3.** Условие: По кругу стоят восемь козлов разного роста. Любой из них умеет перепрыгивать через двух соседних козлов против часовой стрелки.
Докажите, что при любом начальном расположении козлов они смогут встать по росту.

**№ 7.4.** Условие: Имеется несколько кирпичей. Необходимо, не используя теорему Пифагора, при помощи линейки определить длину наибольшей диагонали кирпича.

**№ 7.5.** Условие: Можно ли замостить костями домино размером $1^x2$ шахматную доску размером $8^x8$, из которой вырезаны два противоположных угловых поля?

**№ 7.6.** Условие: Докажите, что доску размером $10^x10$ клеток нельзя разрезать на фигурки в форме буквы Т, состоящие из четырех клеток.

## 8. Разные задачи

**№ 8.1**. Условие:  Найдите 12 последовательных целых чисел таких, что сумма десяти первых из них равна сумме двух последних.

**№ 8.2.** Условие: Две свечи, каждая длиной 24 см, но разной толщины, зажгли одновременно. Тонкая свеча может гореть. 4 ч, а толстая — 6 ч. Через какое время одна свеча стала в 2 раза короче другой?

**№ 8.3.** Условие:  Общая масса нескольких ящиков равна 10 т, а масса каждого из них не превышает 1 т. Какое наименьшее количество рейсов трехтонного грузовика потребуется, чтобы перевезти этот груз? Ответ обоснуйте.

**№ 8.4.** Условие: Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найти его.

**№ 8.5.** Условие: Банк ОГОГО меняет рубли на тугрики по 3000 рублей за тугрик, и еще берет 7000 рублей за право обмена независимо от меняемой суммы.

Банк ЙОХОХО берет за тугрик 3020 рублей, а за право обмена берет 1 тугрик (тоже независимо от меняемой суммы).

Турист установил, что ему все равно, в каком из банков менять деньги. Какую сумму он собирается менять?

**№ 8.6.** Условие: График линейной функции отсекает от второй координатной четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с длинами катетов, равными 3. Найдите эту функцию.

**№ 8.7.** Условие: Найдите все корни уравнения $|x - 2008| = 2009$.

**№ 8.8.** Условие:  Гонцу надо было пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать остаток пути так, чтобы его средняя скорость на всем пути оказалась равной 12 миль в час.

**№ 8.9.** Условие:  Дима взял 2008 одинаковых квадратиков. Он хочет сложить из всех этих квадратиков прямоугольник. Сколько различных прямоугольников он может получить?

**№ 8.10.** Условие:  Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго – 85, без третьего – 80, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?

**№ 8.11.** Условие:  Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $72 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2008-м месте?

## 9. Принцип Дирихле.

**№ 9.1.** Условие: В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

**№ 9.2.** Условие:  В хвойном лесу растут 800000 елей. На каждой ели - не более 500000 иголок. Доказать, что существуют хотя бы две ели с одинаковым числом иголок.

**№ 9.3.** Условие:  В доме живут 40 учеников. Существует ли такой месяц в году, когда хотя бы 4 ученика празднуют свой день рождения.

**№ 9.4.** Условие: В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным образом 51 точку. Доказать, что какие - то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2 м.

**№ 9.5.** Условие: В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Доказать, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

**№ 9.6.** Условие: В международном симпозиуме участвуют 17 человек. Каждый знает не более трех языков и любые два участника могут общаться между собой. Доказать, что хотя бы три участника, знают один и тот же язык.

**№ 9.7.** Условие: В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

**№ 9.8.** Условие: Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

# Глава 4. Решения к олимпиадным задачам 5 класса

## 1. Задачи логического характера

**№ 1.1.** Решение: Нет, он неправ.

Первым утверждением он говорит, что если человек великий, то у него плохой почерк. Но из этого совершенно не следует, что обратное утверждение тоже верно: то есть, что человек с плохим почерком великий. Таким образом, его вывод неверен.

Можно привести много верных математических утверждений, обратные к которым неверны. Например: если два числа чётны, то их сумма тоже чётна. Но совсем не обязательно, что если сумма двух чисел чётна, то оба они тоже чётны (3 + 5 =8).

**№ 1.2.** Решение: Для каждого человека подходит только один вариант ответа, а два не подходят. Поэтому житель города Правдина должен один раз ответить "Да" и два раза "Нет", а житель города Кривдина, наоборот, один раз "Нет" и два раза "Да". Таким образом, если бы все участники опроса были из Правдина, то ответов "Да" было бы столько же, сколько и участников, то есть, 1024. Каждый житель Кривдина даёт два ответа "Да", добавляя один лишний ответ.

Всего ответов "Да" было 289 + 361 + 441 = 1091. Значит, жителей Кривдина было 1091 − 1024 = 67. А жителей Правдина 1024 − 67 = 957.

**№ 1.3.** Решение: 240:60 = 4 (см) — толщина всей книги.

Ответ: 4 см.

**№ 1.4.** Решение: Пусть Олег сказал правду, тогда и Коля сказал правду, а это противоречит условию задачи. Следовательно, Олег сказал неправду, а Коля- правду. Из их утверждений следует, что стекло разбил Олег.

Ответ: Олег.

**№ 1.5.** Решение: Поскольку из А и Б отличник один, то ученик В- отличник. Если из Б и В также отличник один, то ученик Б не является отличником. Получили, что отличниками являются ученики А и В.

Ответ: А и В.

**№ 1.6.** Решение: Если после третьего рыбака осталось 6 рыб, то после второго- 10, после первого-16. Значит весь улов составил 25. Ответ 25 рыб.

**№ 1.7.** Решение: Этот человек лилипут и до кнопки 17 этажа дотягивается только зонтиком или просит кого-нибудь нажать на эту кнопку.

**№ 1.8.** Решение: Решим задачу с ее конца.

Отнимем лишние 10 рыб, останется 90 рыб. В число 90 заключены 3 равные части,2 из которых являются действительным уловом, а третья – дополнительной половиной от действительного улова. Следовательно, эта дополнительная половинка – 30 рыб.

А весь улов 30·2=60 рыб.

**№ 1.9.** Решение:  Необходимо поджечь первый шнур одновременно с обоих концов и получим 30 минут. Одновременно с первым шнуром поджигаем второй шнур с  одного конца, и когда первый шнур догорит (30 минут), поджигаем второй шнур с другого конца ( 15 минут).

**№ 1.10.** Ответ: Калоши стоят 10 рублей, шляпа – 20 рублей, плащ– 110 рублей.

**№ 1.11.** Решение: Такая стена, при таком весе и заданных размерах, будет иметь толщину лишь около 2 сантиметров и легко может быть повалена рукой.

**№ 1.12.** Решение: Здесь фактически две задачи, но они решаются почти одинаково.

а) Требуется определить, сколько нужно вынуть шаров, чтобы среди них обязательно было два шара одного цвета: красного, зеленого или белого. Будем рассуждать следующим образом. Вынув один шар, мы вынимаем следующий. Он может оказаться того цвета, что и первый. Но возможно, что  второй шар иного цвета. Так мы должны быть уверены в том, что среди вынутых шаров обязательно есть два шара одного цвета, то нужно рассматривать худший вариант.

Может оказаться, что вынуто уже 4 шара, но все они различных цветов: 1 красный, 1 белый, 1 зеленый, 1 черный. Но если теперь вынуть еще один шар: красный, белый или зеленый (черного уже нет), то в любом случае получим 2 шара одного цвета.

Ответ: 5 шаров.

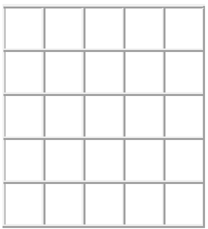
б) При решении задачи также рассматриваем худший вариант. Может оказаться, что вынули 2 красных, 2 белых, 2 зеленых, 1 черный, то есть 7 шаров, но среди них нет трех шаров одного цвета. Значит, нужно вынуть еще один шар, чтобы обязательно было три шара  одного цвета красного или белого.

Ответ: 8 шаров.

**№ 1.13.** Решение: В каждой строке сумма цифр будет равна 16.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 4 |
| 5 | 4 | 2 | 5 |
| 1 | 3 | 9 | 3 |
| 5 | 5 | 2 | 4 |

**№ 1.14.**  Решение: Кладем 6 спичек горизонтально и сверху 6 спичек вертикально. Получаем квадрат 5 на 5.



25 квадратов 1 на 1; 16 квадратов 2 на 2; 9 квадратов 3 на 3; 4 квадрата 4 на 4; 1 квадрат 5 на 5: 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55 квадратов.

Ответ: 55 квадратов

**№ 1.15.** Ответ:

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 8 | 3 |
| 2 | 6 | 10 |
| 9 | 4 | 5 |

**№ 1.16.** Ответ: 7 место. (x+5x+1=37; 6x = 36; x=6, 7место у Игоря)

**№ 1.17.** Ответ: Вере-5 лет; Боре-8 лет, Ане-13 лет; Гале-15 лет.

**№ 1.18.** Решение: На уху пошло 6 окуней, то есть каждому досталось по 2. Первый съел свои 2 окуня, то есть сколько дал, то и съел. Значит, третий съел два окуня из улова второго рыбака. Следовательно, все деньги должен взять второй рыбак.

**№ 1.19.** Решение: Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: прекраснейшая из богинь — Гера. Тогда только она говорит правду. Значит, Афина лжет. Но Афина, в частности, утверждает, что Афродита не самая прекрасная. Стало быть. на самом деле самой прекрасной должна быть Афродита, а не Гера. Итак, этот случай привел нас к противоречию.

Случай 2: прекраснейшая из богинь — Афина, и только она говорит правду. Но тогда Афродита лжет, а она утверждает, что Гера не самая прекрасная. То есть на самом деле прекраснейшей должна быть Гера, а на Афина. Этот случай тоже привел нас к противоречию.

Остается случай 3: прекраснейшая из богинь — Афродита, и только она говорит правду. Но надо еще проверить, что этот случай не приведет нас к противоречию. Афродита утверждает, что она самая прекрасная, а Гера не самая прекрасная, и это верно. Афина утверждает, что самая прекрасная она, а не Афродита. Но это ложь, то есть на самом деле самая прекрасная все-таки Афродита, а не Афина. Гера, называющая самой прекрасной себя, также лжет. Поэтому в этом случае не возникает никаких противоречий, и он является единственно возможным.

**№ 1.20.** Решение: Сначала определим, в каком порядке растут цветы. Уже известно, что желтая лилия растет в правом горшке. Так как в центре нет ничего красного, красная герань может расти только в левом горшке. Значит, в центре растет синяя незабудка.

Теперь выясним, как раскрашены горшки. Красный горшок не может находиться в центре, где нет ничего красного. Не может он оказаться и слева, где растет красная герань. Значит, красный горшок справа, и в нем растет желтая лилия. Синий горшок не может находиться в центре, где растет синяя незабудка, и справа, где уже стоит красный горшок. Поэтому синий горшок слева (в нем растет красная герань). Ну а оставшийся желтый горшок стоит в центре, и в нем растет синяя незабудка.

**№ 1.21.** Решение: Джон сказал: «Я не виновен». По условию задачи два человека являются невиновными: лжец и шутник. Джон не может быть лжецом, так как лжец, в данном случае, сказал бы, что он виновен. Джон не может быть и правдолюбцем, так правдолюбец виновен, и он не сможет сказать неправду. Остается, что Джон шутник, при этом он говорит правду, так как он, действительно невиновен. Джек подтверждает невиновность шутника Джона, т.е. Джек говорит правду, поэтому он не лжец, а правдолюбец, Джек и угнал машину. Джо — лжец и как положено лжецу, он всех обманывает, говоря, что он угнал машину.

**№ 1.22.** Решение: У Ушастика желтый мячик. (Ставим плюс в Ячейку «Желтый, Ушастик», а во все остальные ячейки столбца «Ушастик» и строку «Желтый» заполняем минусами). У Зайки не зеленый, не синий и не красный мячик, значит – оранжевый. (Ставим плюс в ячейку «Оранжевый, Зайка», заполняем свободные ячейки столбца и строки минусами). Так как у Беляка мячик не зеленый и не синий(ставим минусы), не желтый и не оранжевый, значит у него мячик красного цвета. Так как у Прыгунчика не синий мячик, значит у него зеленый. Получаем, что у Тишки мячик синий.

**Цвет мячика**

**Кличка зайчика**

| | Прыгунчик | Ушастик | Тишка | Зайка | Беляк |
|---|---|---|---|---|---|
| Зеленый | + | — | — | — | — |
| Синий | — | — | + | — | — |
| Красный | — | — | — | — | + |
| Желтый | — | + | — | — | — |
| Оранжевый | — | — | — | + | — |

**№ 1.23.** Решение: Кошка заменяет 6 Мышек. Жучка заменяет 5•6 Мышек. Внучка заменяет 4•5•6 Мышек. Бабка заменяет 3•4•5•6 Мышек. Дедка заменяет 2•3•4•5•6 Мышек. Итого потребуется:

(2•3•4•5•6) + (3•4•5•6) + (4•5•6) + (5•6) + 6 + 1 = 1237 Мышек.

**№ 1.24.** Решение: Если вы прочтёте условие задачи внимательно, то поймёте, что озеро было заполнено наполовину через 29 суток. За сутки до того, как озеро заполнится, оно будет заполнено ровно наполовину.

**№ 1.25.** Решение: Мы знаем, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков. А перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было вдвое меньше – по 20, а у Толи – 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т.е. у Пети было 10, у Толи 40, у Вани – 70. И, наконец, возьмём половину фантиков у Вани и Толи и вернём Пете.

Ответ: у Пети было 65 фантиков, у Вани – 20, а у Толи – 35.

**№ 1.26.** Ответ: 6·8+20:(4-2)=58.

**№ 1.27.** Решение: 1+2011=2012

3+2009=2012

5+2007=2012

...

1001+1011=2012

1003+1009=2012

1005+1007=2012

Всего таких пар будет 1004:2+1=503. 503·2012=1 012 036 - искомая сумма

## 2. Взвешивание и переливание

**№ 2.1.** Решение: Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса (где-нибудь в тетради) и получим удвоенный вес трех яблок, а затем и вес трех яблок, следовательно, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трех яблок. Осталось пять взвешиваний и десять яблок, которые взвешиваем попарно и, суммируя все данные, получим вес 13 яблок.

**№ 2.2.** Решение:

1. Переливаем из восьмилитрового ведра 5 литров молока в пятилитровое.

2. Переливаем из пятилитрового ведра 3 литра в трёхлитровое.

3. Переливаем их теперь в восьмилитровое ведро. Итак, теперь трёхлитровое ведро пусто, в восьмилитровом 6 литров молока, а в пятилитровом - 2 литра молока.

4. Переливаем 2 литра молока из пятилитрового ведра в трёхлитровое, а потом наливаем 5 литров из восьмилитрового в пятилитровое. Теперь в восьмилитровом 1 литр молока, в пятилитровом - 5, а в трёхлитровом - 2 литра молока.

5. Доливаем дополна трёхлитровое ведро из пятилитрового и переливаем эти 3 литра в восьмилитровое ведро. В восьмилитровом ведре стало 4 литра, так же, как и в пятилитровом. Задача решена.

**№ 2.3.** Решение: Первым взвешиванием делим песок на две кучки по 4500 г, вторым – одну из этих кучек на две кучки по 2250 г, и, наконец, от одной из этих кучек с помощью гирь отсыпаем 250 г.

Ответ: сможет.

**№ 2.4.** Решение: Весы «уменьшают» вес каждого взвешиваемого предмета на 100 г. Пакеты весят 600 г и 400 г.

Ответ: 600 г и 400 г.

**№ 2.5.** Решение: Примем начальный объем жидкости в каждом стакане за 1. Таким образом, после всего в обоих стаканах имеется единичный объем кофе и единичный объем молока. Поскольку из первого стакана перелили во второй одну ложку, а затем из второго в первый перелили такую же ложку, то в конце в каждом стакане снова будет объем жидкости, равный 1. Пусть объем кофе в первом стакане после переливания равен x, а во втором стакане-y. Тогда молока во втором стакане- (1-y). Поскольку в двух стаканах всего единичный объем кофе, x+y=1. Отсюда x=1-y,т.е. кофе в стакане с молоком и молока в стакане с кофе поровну.

Ответ: Поровну.

**№ 2.6.** Решение: Переливаем из 8 – литрового 5 литров молока в 5 –литровое. Переливаем из 5-литрового бидона 3 литра в 3-литровый бидон. Переливаем их теперь в 8- литровое ведро. Так, теперь 3-литровое ведро пусто, в 8 – литровом 6 литров молока, а в 5 – литровом – 2 литра молока. Переливаем из 5 литрового бидона в 3- литровый, а потом наливаем 5 литров из 8- литрового ведра в 5- литровый бидон. Теперь в 8 – литровом 1 литр молока, в 5 – литровом – 5, а в 3- литровом – 2 литра молока. Доливаем дополна 3- литровый бидон из 5- литрового и переливаем эти 3 литра в 8 – литровое ведро. В 8- литровом ведре стало 4 литра, так же, как и в 5 – литровом бидоне. Задача решена.

**№ 2.7.** Решение: а) Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она - в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую; кладем на чаши весов по 1 монете - фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части.

б) Поступаем абсолютно аналогично, только в самом начале разбиваем монеты на 2 кучки по 9 монет и одну из 7 монет, а в случае надобности кучку из 7 монет разобьём на 2 кучки по 3 монеты и одну "кучку" из одной монеты.

**№ 2.8.** Решение: При таком переливании во втором баке должно было быть больше 26 л бензина, а в первом — ещё больше, чем во втором. Следовательно, даже если надо было бы наполнить только эти два бака, всё равно на это не хватило бы 50 л. Значит, разделить бензин так, как требуется в условии, невозможно.

**№ 2.9.** Решение:

1.Переливаем из восьмилитрового ведра 5 литров молока в пятилитровое.

2. Переливаем из пятилитрового ведра 3 литра в трёхлитровое.

3. Переливаем их теперь в восьмилитровое ведро. Итак, теперь трёхлитровое ведро пусто, в восьмилитровом 6 литров молока, а в пятилитровом - 2 литра молока.

4. Переливаем 2 литра молока из пятилитрового ведра в трёхлитровое, а потом наливаем 5 литров из восьмилитрового в пятилитровое. Теперь в восьмилитровом 1 литр молока, в пятилитровом - 5, а в трёхлитровом - 2 литра молока.

5. Доливаем дополна трёхлитровое ведро из пятилитрового и переливаем эти 3 литра в восьмилитровое ведро. В восьмилитровом ведре стало 4 литра, так же, как и в пятилитровом.

**№ 2.10.** Решение: Положим сначала на каждую чашу по 50 монет. Затем возьмем более тяжелую часть, разобьем ее на кучки по 25 монет и взвесим их. Если их массы равны, то фальшивая монета легче остальных, иначе - тяжелее остальных.

**№ 2.11.** Решение: Разделим 9 монет на три кучки по 3 монеты. Произведём первое взвешивание: положим 2 кучки по 3 монеты на каждую чашку весов. Возможны 2 случая:

a) весы находятся в равновесии, тогда на весах находятся настоящие монеты; фальшивая монета находится среди тех монет, которые не взвешивались;

b) равновесия на весах нет, тогда фальшивая монета среди тех монет, где кучка легче.

Определив, таким образом, кучку с фальшивой монетой, выполним с ней второе взвешивание. Возьмём из трёх монет любые две и положим их на чашки весов. Снова возможны 2 случая:

a) весы находятся в равновесии, тогда фальшивая монета оставшаяся;

b) равновесия нет, в этом случае фальшивая монета там, где вес меньше.

**№ 2.12.** Решение: Разобьем монеты на пары и в каждой паре сравним массы монет. Мы использовали 34 взвешивания. Отделим 34 более легкие монеты из каждой пары и 34 более тяжелые. Самую легкую монету нужно искать среди первой группы б, а самую тяжелую – среди монет второй группы. В «легкой» группе будем класть каждую чашу  весов по одной монете в любом  порядке б отбрасывая каждый раз ту монету  б которая была потяжелее. После 33 взвешиваний мы отбросим 33 монеты, тем самым , останется одна, самая легкая. Аналогично, за 33 взвешивания мы определим самую тяжелую монету из «тяжелой» кучи. Таким образом, за 100 взвешиваний мы найдем самую легкую и самую тяжелую монеты.

**№ 2.13.** Решение:

1) Набираем полностью сосуд 5 литров. (в первом 0л, во втором 5л)

2) Переливаем часть в 3х литровый (в первом 3л, во втором 2л)

3) Выливаем из 3х литрового сосуда 3 литра. Он становится пустым (в первом 0, во втором 2)

4) Переливаем литра из 5ти литрового сосуда в 3х литровый 2 литра. (в первом 2л, во втором 0л)

5) Набираем полностью 5ти литровый сосуд (в первом 2л, во втором 5л)

6) Переливаем из 5-ти литрового в 3-х литровый сколько влезет (в первом 3, во втором 4).

7) Из первого можно вылить не нужные 3 литра.

Таблица переливаний:

| Таблица переливаний | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Шаг 1 | Шаг 2 | Шаг 3 | Шаг 4 | Шаг 5 | Шаг 6 | Шаг 7 | Шаг … |
| 3 л | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 | |
| 5 л | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 | 4 | |

**№ 2.14.** Решение: Для начала надо собрать полное ведерко ягод на 8 литров. Затем пересыпать ягоды в ведерко на 5 литров, и останется 3 литра ягод в 8-ми литровом ведерке. Вишни из 5-литрового ведерка высыпаем на один листочек, а из 8-ми литрового 3 литра оставшейся вишни пересыпаем в 5-ти литровое ведерко. Кучку с листочка засыпаем в 8-ми литровое ведерко (5 литров) и снова собираем землянику до полного ведерка 8 литров. Когда ребята соберут снова полное ведро на 8 литров им нужно из него отсыпать 2 литра ягод в 5-ти литровое ведерко, в котором уже есть 3 литра. И в 8-ми литровом ведерке останется ровно 6 литров вишни.

**№ 2.15.** Решение: Может. Для начала надо из 12-ти литровой бочки отлить мед в 5-ти литровую банку, после чего в бочке останется 7 литров. Из 5-ти литровой банки перелить мед в 9-ти литровую банку. Снова из бочки набрать мед в 5-ти литровую банку и отлить из нее мед в 9-ти литровую. После этого в бочке останется 2 литра меда, в 5-ти литровой банке 1 литр. Из 9-ти литровой банки вылить 9 литров меда в бочку и там станет 11 литров. Из 5-ти литровой банки 1 литр меда вылить в 9-ти литровую банку и набрать полную 5-ти литровую банку, долить этот мед в 9-ти литровую банку, в которой налит уже 1 литр меда. В бочке останется 6 литров и 6 литров станет в 9-ти литровой банке.

**№ 2.16.** Решение: Могут. Лунтик наберет полное ведерко в 8 литров и отольет Кузе в 5-ти литровое ведерко, после чего в 8-ми литровом ведре останется 3 литра. Кузя выльет воду обратно в пруд, а Лунтик из своего ведра выльет 3 литра Кузе. Лунтик снова наберет 8 литров и дольет воду Кузе. После чего у Лунтика останется 6 литров. Кузя выльет всю воду в пруд, а Лунтик из своего ведерка выльет воду снова Кузе. После этого у Кузи будет снова полное ведерко, а у Лунтика останется 1 литр. Кузя снова выльет всю воду в пруд, а Лунтик выльет воду Кузе в ведерко и наберет 8-ми литровое ведро из которого уже отольет 4 литра Кузе (у Кузи есть 1 литр), а Кузя снова выльет воду в пруд. Лунтик выльет свои 4 литра Кузе и снова наберет свое ведерко в 8 литров и дольет в ведерко Кузи 1 литр (там 4 литра есть). В итоге у Лунтика останется 7 литров воды и они с Кузей смогут помочь пауку Шнюку.

**№ 2.17.** Решение: Разделить 9 конфет поровну на три кучки по 3 конфетки и взвесить. Кучка с камушком будет тяжелее. Кучку, которая будет тяжелее снова разделить на три и взвесить. Камушек будет тяжелее.

**№ 2.18.** Решение:

| 14 литровый бидон | 9 литровый бидон | 5 литровый бидон |
|---|---|---|
| 14 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 5 |
| 9 | 5 | 0 |
| 4 | 5 | 5 |
| 4 | 9 | 1 |
| 13 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 5 |
| 8 | 6 | 0 |
| 3 | 6 | 5 |
| 3 | 9 | 2 |
| 12 | 0 | 2 |
| 12 | 2 | 0 |
| 7 | 2 | 5 |
| 7 | 7 | 0 |

**№ 2.19.** Решение: Делим все 100 монет на две части по 50 монет. Кладем на весы. Одна часть легче другой. Берем, например, более легкую часть, делим на две части по 25 монет. Взвешиваем эти части:

1) Если их вес равный, значит, фальшивая монета осталась среди 50 более тяжелых монет и она тяжелее настоящих.

2) Если их вес разный, значит, фальшивая монета среди этих 50 более легких монет и она легче настоящих.

**№ 2.20.** Решение лучше и удобнее оформить в виде таблицы:

| Ходы | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 л | 5 | 2 | 2 | - | 5 | 4 |
| 3 л | - | 3 | - | 2 | 2 | 3 |

Наполняем из бочки 5-литровый сосуд медом (1 шаг). Из 5-литрового сосуда отливаем 3 л в 3-литровый сосуд (2 шаг). Теперь в 5-литровом сосуде осталось 2 литра меда. Выливаем из 3-литрового сосуда мед назад в бочку (3 шаг). Теперь из 5-литрового сосуда выливаем те 2 литра меда в 3-литровый сосуд (4 шаг). Наполняем из бочки 5-литровый сосуд медом (5 шаг). И из 5-литрового сосуда дополняем медом 3-литровый сосуд. Получаем 4 литра меда в 5-литровом сосуде (6 шаг). Задача решена.

Поиск решения можно было начать с такого действия: к трем литрам добавить 1 литр. Но тогда решение будет выглядеть следующим образом:

| Ходы | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 л | - | 3 | 3 | 5 | - | 1 | 1 | 4 |
| 3 л | 3 | - | 3 | 1 | 1 | - | 3 | - |

**№ 2.21.** Решение: Разделим монетки на 33 кучки по 3 монетки + 1 монетка.
Каждое трио взвешиваем между собой, получим 3 неравенства, в результате которых увидим, либо каждая монетка будет по одному разу весить меньше от других двух, либо два раза будет весить меньше других двух.
1>2 (возможны такие варианты: н=н, ф=ф, 2-фальшивка)
1<3 (н=н, ф=ф, 1- фальшивка)
2>3 (н=н, ф=ф, 3- фальшивка)
такое возможно, если все три монетки имеют одинаковый вес вежду собой, то есть из них откладываем в сторонку любую одну
1<2(н=н,ф=ф,1-ф)
1<3(н=н,ф=ф,1-ф)
2>3(н=н,ф=ф,3-ф)
У 1 больше вероятностьть оказаться фальшивой, так что ее и откладываем.
И так проделываем с каждой из 33-х кучек, в результате отложим 11 монет +1, которая не попала ни в одну из кучек.
Эти 12 монет опять разделям на 4 кучки по 3 монетки, проделываем те же манипуляции, в результате получим 4 монетки, разделяем на 1 кучку+1, та монетка из кучки, которая окажется легче, вновь откладываем и сравниваем с одинокой монеткой. Та, которая легче и будет фальшивой.

**№ 2.22.** Решение: Разделим монеты на три кучки по 9 монет. Положим на чашу весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем , в какой из кучек находится фальшивая монета ( если весы покажут равенство, то она – в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим , в какой из частей находится фальшива монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете – фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части.

**№ 2.23.** Решение: Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она — в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете — фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части. Задача решена.

**№ 2.24.** Решение: Надо произвести следующие три взвешивания:

1)Развесить крупу на 2 равные части (это можно сделать без гирь).

2)Одну из получившихся частей ещё раз развесить пополам — по 2,25 кг.

3)От одной из этих частей отвесить (при помощи гирь) 250 г. Останется 2 кг.

**№ 2.25.** Решение: Будем раскладывать гирьки в порядке возрастания их весов в три мысленно пронумерованные кучки, поочередно начиная то с № 1, то с № 3.

Кучка №1 1 6 7 12 … 997 1002

Кучка №2 2 5 8 11 … 998 1001

Кучка №3 3 4 9 10 … 999 1000.

**№ 2.26.** Решение: Как в результате можно получить 4 л? Нужно из 5-литрового сосуда отлить 1 л. А как это сделать? Нужно в 3-литровом сосуде иметь ровно 2 л. Как их получить? – Из 5-литрового сосуда отлить 3 л.

Решение лучше и удобнее оформить в виде таблицы:

| Шаг | Сосуд – 3л | Сосуд – 5л |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 0 |
| 5 | 2 | 5 |
| 6 | 3 | 4 |

Наполняем из бочки 5-литровый сосуд медом (1 шаг). Из 5-литрового сосуда отливаем 3 л в 3-литровый сосуд (2 шаг). Теперь в 5-литровом сосуде осталось 2 литра меда. Выливаем из 3-литрового сосуда мед назад в бочку (3 шаг). Теперь из 5-литрового сосуда выливаем те 2 литра меда в 3-литровый сосуд (4 шаг). Наполняем из бочки 5-литровый сосуд медом (5 шаг). И из 5-литрового сосуда дополняем медом 3-литровый сосуд. Получаем 4 литра меда в 5-литровом сосуде (6 шаг). Задача решена.

## 3. Задачи на числовые зависимости

**№ 3.1.** Решение: Пусть x — цифра десятков, y — цифра единиц искомого числа. Тогда само число равно 10x+y. Из условия следует, что x+y=12 и 10x+y+36=10y+x. Получаем систему двух уравнений, которую можно решить методом подстановки: выразить из первого уравнения x и подставить во второе полученное выражение. В результате, x=4 и y=8. Ответ: 48.

**№ 3.2.** Решения: Рассуждаем с конца, имеем: 2*7=14, 14+6=20, 20:4=5, 5*9=45, 45-5=40. Ваня задумал число 40.

**№ 3.3.** Решение: Пусть x- число десятков искомого числа; тогда x+2- число единиц. Получаем (10x+x+2)(x+x+2)=144

(11x+2)(2x+2)=144; 144=2*72=4*36=24*6=8*18=16*9=48*3=144*1

Приравнивая скобки к множителям числа 144 и помня, что x-однозначное натуральное число, с помощью перебора получаем: $11x+2=24$ и $2x+2=6$. $X=2$. Число десятков- 2, число единиц- 4.

Ответ: 24.

**№ 3.4.** Решение: а) Не может, т.к. квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 2, ни на 8; б) Не может, т.к. такое число делится на 3, но не делится на 9. Значит, оно не может быть точным квадратом.

Ответ: а) Не может; б) Не может.

**№ 3.5.** Ответ: $4 \cdot 12 + 18 : (6 + 3) = 50$

**№ 3.6.** Решение:

1) 300 - 210 = 90 (к.) стоят 10 пирожков

2) 90 : 10 = 9 (к.) – 1 пирожок

3) 40 • 9 = 360 (к.) – стоимость 40 пирожков.

4) 360 + 300 = 660 (к.) – стоимость 30 пирожных

5) 660 : 30 = 22 (к.) – цена 1 пирожного.

Ответ: 22 копейки и 9 копеек.

**№ 3.7.** Решение: Поскольку мест в автобусах не осталось, число детей, выехавших в каждом из двух направлений, кратно числу мест в автобусе. Следовательно, число мест в автобусе - общий делитель чисел 115 и 138. Для отыскания общего делителя воспользуемся правилом : общий делитель двух чисел является также общим делителем этих чисел и их разности.

138 - 115 = 23. Всего автобусов с детьми было:

$(115 + 138)/23 = 11$ автобусов.

**№ 3.8.** Решение: $1+2+3=1*2*3$.

**№ 3.9.** Решение: 1. Пусть цифра единиц истинного множителя есть x (x — целое число, меньшее 10); тогда цифра десятков есть 3x, а сам множитель равен $3 \cdot 10x+x=31x$. Ошибочно записанный множитель был $10x+3x=13x$. Истинное произведение равно $78 \cdot 31x$, ошибочно полученное произведение есть $78 \cdot 13x$. По условию $78 \cdot 31x-78 \cdot 13x=2808$, откуда $x = 2$. Значит, истинный множитель равен 62, а истинное произведение равно 4836.

Ответ: 4836.

**№ 3.10.** Ответ:

Три варианта:

$13 – 11 + 9 – 7 – 5 + 3 – 1 = 1$,

$13 – 11 – 9 + 7 + 5 – 3 – 1 = 1$ и

$13 + 11 – 9 – 7 – 5 – 3 + 1 = 1$.

Сумма 13 + 11 равна сумме чисел 9, 7, 5 и 3, поэтому если первая звездочка заменена на «+», то возможен только один вариант (третий). Если эта звездочка заменена на «–», а вторая – на «+», то третья уже не может заменяться на «+», так как 13 – 11 + 9 + 7 > 5+ 3 + 1 + 1, и мы получаем первый вариант. Наконец, если первые две звездочки заменены на «–», то третья должна заменяться на «+», и мы получаем второй вариант.

**№ 3.11.** Решение: Квадрат числа не может оканчиваться цифрами 2 или 3, или одним нулём. Значит, последняя цифра равна 5, тогда цифра десятков равна 2. Следовательно, искомое число $3025 = 55^2$.

**№ 3.12.** (?) Решение: следовательно, если от этого числа отнять 1, то разность должна делиться и на 4, и на 5, и на 6, то есть на 60. Числа 61, 121, 181, 241 на 7 не делятся. Значит, наименьшее число солдат 301. Ответ 301.

**№ 3.13.** Решение: после каждого хода четность числа меняется: после первого ученика число становится нечетным, после второго - четным, после третьего – нечетным, а нуль - число четное. Значит, нуль в конце получиться не может.

**№ 3.14.** Решение: Число 30030 делится на 2, но не делится на 4. Поэтому среди трёх чисел, произведение которых равно 30030, одно чётное и два нечётных. Но сумма двух нечётных чисел и одного нечётного всегда является чётной, тогда как число 201 нечётно. Полученное противоречие доказывает, что Незнайка соврал.

**№ 3.15.** Решение: 9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99 или 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99.

**№ 3.16.** Решение: Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку. Количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков чётно.

**№ 3.17.** Решение: Из условия следует, что 100-4=96 делится на искомое число. Также 90-18=72 делится на искомое число. Их разность также делится на искомое число: 96-72=24. Найдем НОД (96;72)=24.

**№ 3.18.** Решение: Удвоенная неизвестная цифра дополняет сумму известных цифр числа до величины, кратной 9-ти. Сумма известных чисел — четная (16). Удвоенная неизвестная цифра (а) — также четная величина. Следовательно, сумма цифр искомого числа — четная и равна 18-ти. (2а меньше или равна 18 и сумма цифр искомого числа не больше 34-х). Итак, а = 1, искомое число — 1971.

**№ 3.19.** Решение: Обозначим для простоты вес каждого из перечисленных в задаче объектов заглавными буквами

Т – вес теленка, П – поросенка, Я – вес ящика, К – вес кошки. Составим на оснований систему уравнений, описывающих взаимоотношения между массами объектов:

Т + П = 5Я

П = 4 К

2К + П = 3Я

Требуется выразить вес теленка (Т) через вес кошки (К).

Умножим обе части третьего уравнения на дробь $\frac{3}{5}$

$$\frac{10К}{3} + \frac{5П}{3} = 5Я$$

Следовательно

Т + П = $\frac{10К}{3} + \frac{5П}{3}$

$Т = \frac{10К}{3} + \frac{2П}{3}$

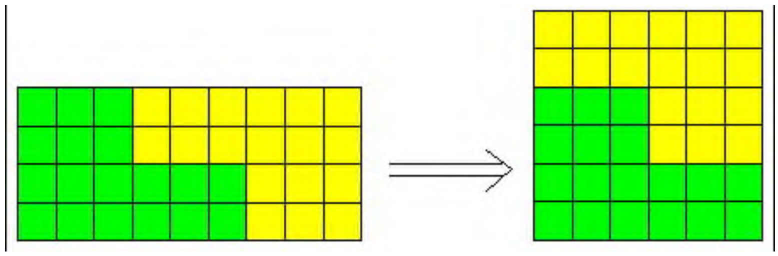
И, так как П = 4К, то

$Т = \frac{10К}{3} + 2 \cdot \frac{4К}{3} Т = 6К$

Ответ: 6 кошек уравновесят теленка

### 4. Разрезания. Замощения. Раскраски.

**№ 4.1.** Решение: Всего в прямоугольнике 36 клеток. Поэтому квадрат получится размером 6×6. Так как длинная сторона состоит из девяти клеток, то три из них нужно отрезать. Как дальше пойдет этот разрез?

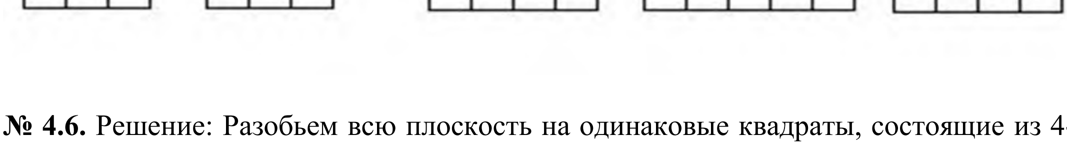


**№ 4.2.** Решение: Нельзя, т.к. общее количество клеток 25 не делится на 2, а каждая костяшка домино покрывает 2 клетки.

**№ 4.3.** Решение: Чтобы разрезать доску на прямоугольники, содержащие по 2 клетки, черных и белых клеток в ней должно быть поровну. Но это условие не выполнено, значит, разрезать доску, как требуется в условии, нельзя.

**№ 4.4.** Решение. Так как площадь прямоугольника равна 16x9=144 см2, то квадрат должен быть со стороной 12. По стороне 16 отступаем 4 см и режем вниз на 4, затем вправо на 4,снова вниз на 4, вправо на 4 и вниз на 4. Теперь левый кусок смещаем вниз и вправо по 4 см, и получаем квадрат.

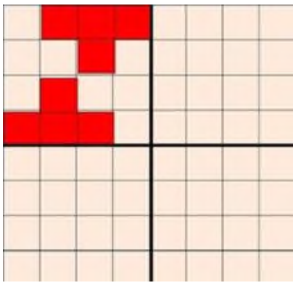

**№ 4.5.** Решение: Составьте квадрат, используя ровно четыре из пяти изображенных ниже фигур. Каждую из четырех выбранных Вами фигур можно использовать только один раз.



**№ 4.6.** Решение: Разобьем всю плоскость на одинаковые квадраты, состоящие из 4-х клеток каждый. В каждом из этих квадратов «левую верхнюю» клетку назовем черной, «правую верхнюю» - белой, «левую нижнюю» - красной, «правую нижнюю» - синей. Тогда, с одной стороны, любые две клетки одного цвета не соприкасаются. С другой стороны, среди отмеченных клеток можно выбрать не менее четверти таких, которые имеют одинаковый цвет, ибо в противном случае всего клеток было бы не менее, чем 4 * (n/4 ) = n.

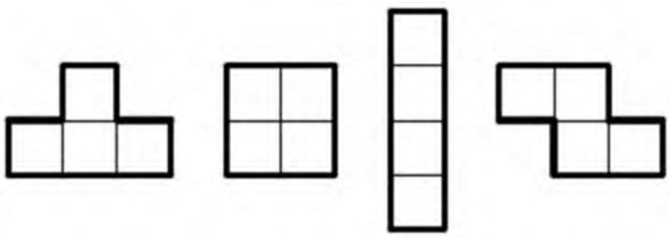
**№ 4.7.** Ответ:

**№ 4.8.** Решение: Разделим шахматное поле на 4 равных квадрата. Получим 4 квадрата размером 4 на 4. В каждом таком квадрате можно разместить 4 фигуры с рисунка.

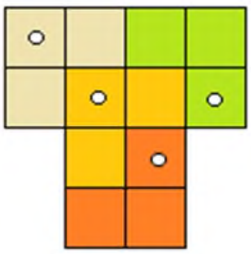


Ответ: Можно. 16 фигур.

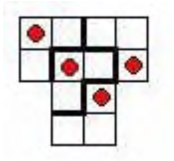
**№ 4.9.** Решение:

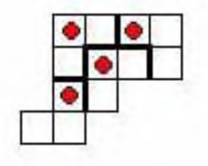


**№ 4.10.** Решение:



**№ 4.11.** Ответ: См. рисунок

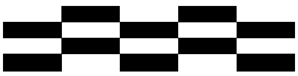




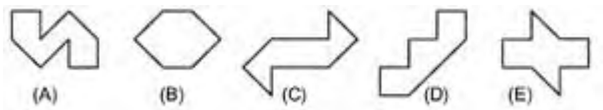
**№ 4.12.** Решение: Нельзя. Рассмотрим шахматную доску 8 × 8, уберем две черные клетки (левую нижнюю и правую верхнюю). Каждая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетку. Фигура, которую можно покрыть доминошками, должна содержать белых и черных клеток поровну. В нашей же фигуре белых клеток больше, чем черных.

**№ 4.13.** Решение: Раскрасим доску в 2 цвета. Черных клеток-13, а белых 12. При переползании с черных клеток жуки переползали на белые и наоборот. Так как белых клеток 12, а черных на одну больше и все жуки с белых переползают на черные, то одна черная клетка останется.

Ответ : останется 1 черная клетка.



**№ 4.14.** Решение:




Ответ: D.

**№ 4.15.** Ответ: 15.

5. **Задачи на движение.**

**№ 5.1.** Решение: За 10 мин машина проходит путь, равный двойному расстоянию от станции до места встречи инженера с машиной. Значит, путь от станции до места встречи машина проходит за 5 мин. На месте встречи машина была за 5 мин до времени обычного приезда инженера на станцию, значит, путь от станции до места встречи инженер шел 55 мин - 5 мин = 50 мин. Следовательно, скорость инженера в 50 : 5 = 10 раз меньше скорости машины.

Ответ: В 10 раз.

**№ 5.2.** Решение: 1) 240 : 3 = 80 (с) скакала мама Кенгуру

2) сын за пол секунды – 1 м, за 1 с- 2 м

3) 80 * 2 = 160 (м) проскачет кенгуренок за 80 с

4) 240 – 160 = 80 (м) осталось проскакать кенгуренку когда мама уже под эвкалиптом

5) 80 : 2 = 40 (с)

Ответ: 40 с.

**№ 5.3.** Решение: Туристу на обратный путь понадобилось 3 часа

5*3=15(км) - весь путь

3+2=5(км/ч) - скорость на обратном пути

15:5=3(ч) – время, потраченное на обратный путь.

**№ 5.4.** Решение: В последний день гусеница поднимется на 6 метров, значит ей надо проползти ещё 14-6=8(м). В день она поднимается на 6-4=2(м). Тогда 8 метров проползет за 8:2=4 (дня).Все время движения составит 1+4=5 (дней).

**№ 5.5.** Решение: 60 км/час = 60/60 = 1 км/мин

1 + 1 = 2 (км) ---- путь поезда к тому моменту, когда он весь выйдет из туннеля.

2 : 1 = 2 (мин) --- нужно, чтобы поезд вышел весь.

**№ 5.6.** Решение: Пусть длина круговой дорожки равна s, $v_в$, $v_п$ – скорости Вани и Пети соответственно. Тогда $\frac{s}{v_в} = 6$, $\frac{s}{v_п} = 4$ и $v_в < v_п$. На старте Петя сразу вырывается вперед, можно считать, что расстояние от него до Вани равно s. Чтобы Петя догнал Ваню, потребуется время $\frac{s}{v_п - v_в}$, которое равно

$$\frac{1}{\frac{v_П}{s} - \frac{v_B}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{24}} = 12 \text{ (мин)}.$$

Ответ: 12 мин.

**№ 5.7.** Решение: Чтобы найти время, необходимо путь разделить на скорость сближения. Значит Лунтик догонит Кузю через

6 м : (8 м/мин – 7 м/мин) = 6 минут.

Ответ: через 6 минут.

**№ 5.8.** Решение: Путь – время умноженное на скорость. Путь один и тот же, обозначим за S. Тогда путь Милы – $S = 30v_1$, а путь Пчеленка – $S = 40v_2$. Приравняем

$30v_1 = 40v_2$;

$v_1 = 4/3v_2$.

Мы не знаем, сколько времени пройдет до встречи, но знаем, что путь будет один и тот же. Поэтому время, которое потратит Мила, до встречи будет t, а время, через которое догонит ее Пчеленок – (t + 1).

Составим уравнение и решим относительно времени:

$V_1 t = v_2(t + 6)$

подставим значение $v_1 = 4/3v_2$ в уравнение и получим

$4/3v_1 t = v_2(t + 6)$;

$t + 6 = 4/3t$;

$1/3t = 6$;

$t = 18$ минут

Ответ: через 18 минут.

**№ 5.9.** Решение: 1 час : Два человека (А и В) едут на мотоцикле и проезжают 50 км, а третий человек (С) идёт пешком и проходит 5 км.

2 час: Человек (В) сходит с мотоцикла и идёт пешком. Он проходит 5 км. Человек (С) идёт пешком и проходит ещё 5 км. Человек (А) возвращается на 40 км и ждёт человека (С) там.

3 час: Два человека (А и С) на мотоцикле добираются до пункта назначения. Человек (В) проходит ещё 5 км и оказывается в пункте назначения. Ответ. Могут.

**№ 5.10.** Решение: Автомобили стартовали одновременно, и первый автомобиль через 20 минут после старта опережал второй автомобиль на один круг. Значит, за эти 20 минут, то есть за $\frac{1}{3}$ часа он проехал на 1 круг больше – то есть на 8 км больше.

За час первый автомобиль проедет на $8 \cdot 3 = 24$ км больше второго. Скорость второго автомобиля на 24 км/ч меньше, чем у первого, и равна 114 - 24 = 90 км/ч.

Ответ: 90 км/ч.

**№ 5.11.** Решение:
1) 80*2=160(км) -прошёл скорый поезд за 2 часа.
2) 720-160=560(км) -осталось пройти поездам.
3) 80+60=140(км/ч) -скорость сближения 2 поездов.
4) 560:140=4(ч) -был в пути пассажирский поезд.
Ответ: 4часа.

**№ 5.12.** Решение: Чем короче прыжок, тем больше их надо сделать, чтобы добраться до тенистого дерева. Следовательно, кенгуру понадобится сделать 1,5 Х 6 = 9 прыжков.

**№ 5.13.** Решение: Обозначим через s отрезок пути, который Буратино проехал от того момента, как проснулся, до конца. Тогда путь, который Буратино проспал, составит 2s. Всего же от момента, как Буратино заснул, он проехал путь 2s + s = 3s. Но известно, что это — половина всего пути. Значит, длина всего пути 6s. Поскольку же бодрствующим Буратино проехал путь 4s, то по отношению ко всему пути эта часть составит 2/3 пути.

**№ 5.14.** Решение: По условию три прыжка собаки равны 5 прыжкам зайца, следовательно,

21 прыжок собаки равен 35 прыжкам зайца. Заметим, что собака делает 7 прыжков за то время, за которое заяц делает 9 прыжков, значит, собака делает 21 прыжок за то время, за которое заяц делает 27 прыжков. Известно, что 21 прыжок собаки равен 35 прыжкам зайца, следовательно, собака, сделав 21 прыжок, приближается к зайцу на 8 заячьих прыжков. Сделав 105 прыжков, собака приблизится к зайцу на 40 заячьих прыжков, т.е. догонит зайца.

Другая запись решения:

1 прыжок собаки обозначим 1с, 1 прыжок зайца – 1з.

7с – 9з, а 3с = 5з

НОК(3; 7) = 21

21с – 27з, а 21с = 35з

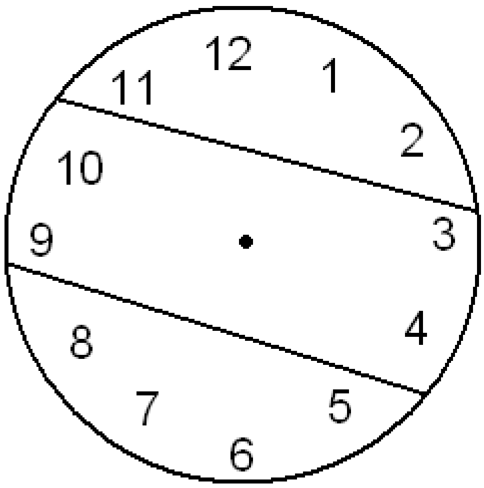
35з – 27з = 8з – на столько приблизилась собака.

8з · 5 = 40з, когда 21с · 5 = 105с.

Ответ: 105 прыжков собаки.

## 6. Задачи на циферблате

**№ 6.1.** Решение:

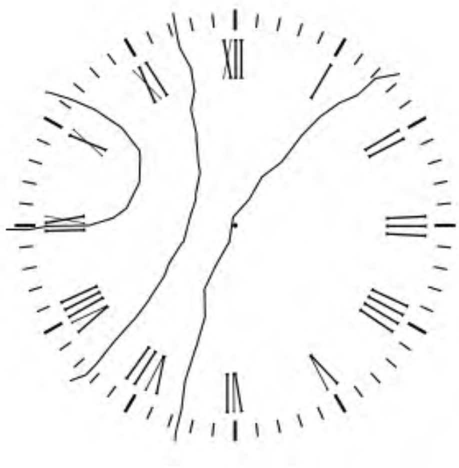



**№ 6.2.** Решение: 12 : 3 = 4 часа в каждом

С 12 до 4, с 4 до 8, с 8 до 12.

**№ 6.3.** Ответ: 30°

**№ 6.4.** Решение: В числах IX, X и XI — три десятки (X) расположены рядом. Ясно, что две из них должны войти в один кусок. Представляются только два возможных случая для проверки. После нескольких проб вы получите такое расположение трещин, которое показано на рисунке. Сумма чисел в каждом куске циферблата равна 20:



**№ 6.5.** Решение: Скорость минутной стрелки – 12 полных оборотов за пол дня, а скорость часовой – 1 полный оборот за пол дня. Пока часовая стрелка пройдет расстояние от 12 до 1, то минутная сделает полный оборот. Значит стрелки встретятся во втором часу дня.

Ответ: во втором часу.

**№ 6.6.** Решение: Часовая стрелка совершает один полный оборот за 12 часов.

Один полный оборот - 360°.

1 ч = 60 мин

12 ч = 720 мин

Найдём скорость движения часовой стрелки:

360 : 720 = 0,5° - за 1 минуту.

Найдём положение часовой стрелки в 7 часов 38 мин

относительно 00 часов 00 минут.

7 ч 38 мин = 458 мин

458 * 0,5 = 229°

Минутная стрелка совершает один полный оборот за 1 час.

1 ч = 60 мин

Найдём скорость движения минутной стрелки:

360 : 60 = 6° - за 1 минуту.

Найдём положение минутной стрелки:

38 * 6 = 228°

Найдём острый угол между часовой и минутой стрелками:

229° - 228° = 1°

Найдём внешний угол между часовой и минутной стрелками:

360° - 1° = 359°

Ответ: 1° или 359°.

**№ 6.7.** Решение: Юля будет спать 8 часов (с 22:00 до 6:00). Если за сутки, то есть за 24 часа, будильник уходит вперёд на 9 минут, то за 8 = 24 : 3 часов он уйдёт вперёд на 9 : 3 = 3 минуты. Тогда в 6:00, когда Юле надо проснуться, будильник будет показывать 6:03. Именно в этот момент он и должен зазвонить.

**№ 6.8.** Решение: Допустим, мы нашли такую секунду, когда часы показывают, что минут больше, чем секунд (например, 04:45:14). Будем называть все такие секунды секундами первого типа. Поменяв местами минуты и секунды, получим такую секунду, когда на часах больше секунд, чем минут (в нашем примере 04:14:45). Все такие секунды будем называть секундами второго типа. Аналогичным образом каждой секунде второго типа можно подобрать в пару секунду первого типа (например, парой для

23:37:59 будет 23:59:37). Поэтому те секунды, когда минут и секунд на часах не поровну, разбились на пары: в каждой паре одна секунда первого типа, а другая — второго. А значит, секунд обоих типов поровну.

**№ 6.9.** Решение.

Сумма всех чисел на циферблате равна 78.Найдем такую комбинацию

$x \cdot y = 78$, где x и y – натуральные числа, $x>12$ ( поскольку число 12 также входит в какую- то часть), $y>1$- число частей.

Воспользуемся тем, что $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$.

Варианты:

1)x=39,y=2;

2)x=26,y=3;

3)x=13,y= 6.

1 вариант решения

10,11,12,1,2,3

9,8,7,6,5,4

2 вариант решения

11,12,1,2

10,9,3,4,

8,7,6,5

3 вариант решения

12,1

11,2

10,3

9,4

8,5

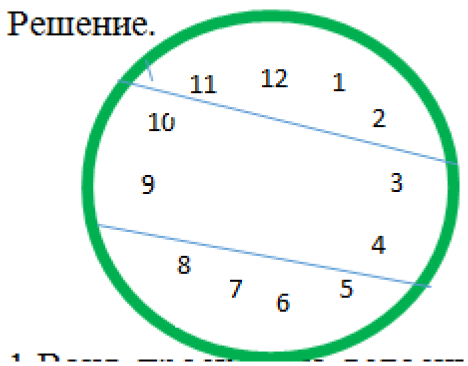
7,6

**№ 6.10.** Решение: 7 часов 50 минут – 25 минут =7 часов 25 минут.

7 часов 25 минут – 15 минут = 7 часов 10 минут

Ответ: 7 часов 10 минут.

**№ 6.11.**




**№ 6.12.**Решение: Начнем опять с 12 часов, когда обе стрелки совпадают. Нужно вычислить, сколько времени потребуется для того, чтобы минутная стрелка обогнала часовую ровно на полкруга, – тогда обе стрелки и будут направлены как раз в противоположные стороны. Мы уже знаем (см. предыдущую задачу), что в течение целого часа минутная стрелка обгоняет часовую на 11/12 полного круга; чтобы обогнать ее всего на 1/2 круга, понадобится меньше времени, чем целый час, – меньше во столько раз, во сколько 1/2 меньше 11/12, т. е. потребуется всего 6/11 часа. Значит, после 12 часов стрелки в первый раз располагаются одна против другой спустя 6/11 часа, или 32 8/11 минуты. Взгляните на часы в 32 8/11 минуты первого, и вы убедитесь, что стрелки направлены в противоположные стороны.

Единственный ли это момент, когда стрелки так расположены? Конечно, нет. Такое положение стрелки занимают спустя 32 8/11 минуты после каждой встречи. А мы уже знаем, что встреч бывает 11 в течение двенадцати часов; значит, и располагаются стрелки врозь тоже 11 раз в течение 12 часов. Найти эти моменты нетрудно:

12 ч. + 32 8/11 мин. = 12 ч. 32 8/11 мин.

1 ч. 5 5/11 мин. + 32 8/11 мин. = 1 ч. 38 2/11 мин.

2 ч. 10 10/11 мин. + 32 8/11 мин. = 2 час. 43 7/11 мин.

3 ч. 16 1/11 мин. + 32 8/11 мин. = 3 ч. 49 1/11 мин. и т. д.

## 7. Задачи – ребусы

**№ 7.1.** Решение: (9-8-7+6):5=0

**№ 7.2.** Решение:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

**№ 7.3.** Решение:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 8 | 10 | 5 |
| 2 | 13 | 3 | 16 |
| 7 | 12 | 6 | 9 |
| 14 | 1 | 15 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 10 | 5 |
| 2 | 13 | 11 | 8 |
| 15 | 4 | 6 | 9 |
| 14 | 1 | 7 | 12 |

**№ 7.4.** Решение: С = 3, И - 4, Н - 2, Ц = 5, А = 7, П = 6, Т = 8, Ч = 9, К =1. Получился пример 342457+342457=684914.

Ответ: 342457+342457=684914.

**№ 7.5.** Ответ: ( 3930 +3980 = 7910)

**№ 7.6.** Ответ: (6823 + 6823 =13646).

**№ 7.7.** Ответ: Компьютер.

**№ 7.8.** Ответ: Перпендикуляр.

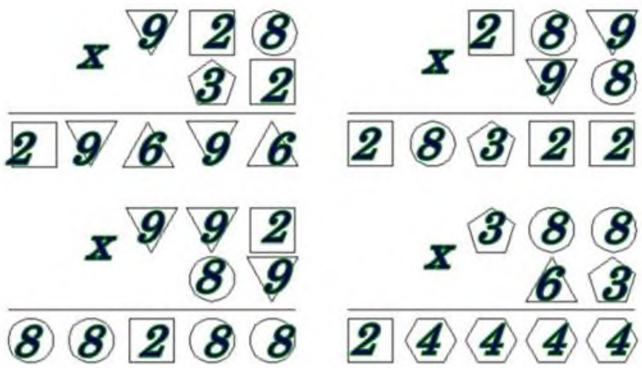
**№ 7.9.** Ответ: Задача.

**№ 7.10.** Ответ: Вершина.

**№ 7.11.** Ответ: Знаменатель.

**№ 7.12.** Ответ: Число.

**№ 7.13.** Ответ: Круг – 8, квадрат – 2, треугольник – 6, перевернутый треугольник – 9, пятиугольник – 3, шестиугольник – 4.




**№ 7.14**. Ответ: 9745 + 627 = 10372.

**№ 7.15.** Ответ: 1465 + 465 + 65 + 5 = 2000.

**№ 7.16.** Ответ: круг – 49, треугольник пустой – 57, треугольник закрашенный – 100, квадрат – 18.

82 + 18 = 100,

49 + 8 = 57,

57 – 39 = 18,

94 – 45 = 49.

**№ 7.17.** Решение:

3 собаки = 36, значит 1 собака = 12.

1 собака + 8 пальцев = 28, значит 8 пальцев = 16, 1 палец =2.

4 пальца – 3 кости =5 , значит, так как 1 палец =2, то 4 пальца = 8, а 3 кости=3.

3 пальца =3*2=6,

1 кость = 1, значит 2 кости = 2.

Получим: 6+12:2=6+6=12

Ответ: 12.

**№ 7.18.** Решение: Так как наибольшая цифра в числе «СИЛЕН» равна 5, а С = 1, то остальные 4 цифры в данном числе будут 2, 3, 4, 5.

Так как Н < 6, то И = 2. А значит, Н = 4. Так как Л > Е (в самом деле так как Е + 1 = Л, то Л > Е, ведь Л и Е меньше 5 по условию), то Л = 5, Е = 3.

А тогда уже легко находим остальные цифры: Ш = 8, Р = 9.

В итоге получается: 9382 + 3152 = 12534

Ответ: 9382 + 3152 = 12534

**№ 7.19.** Решение: Максимальное значение суммы трех наших слагаемых равно 9 + 9 + 99 = 117. Значит, ∆ ∆ ∆ = 111. Минимальное значение числа ○○ равно 111 — 9 — 9 = 93, а само число равно 99. На долю одного черного треугольника приходится (111 — 99) : 2 = 6.

**№ 7.20.** Решение:

| | | |
|---|---|---|
| **4** | **8** | |
| 2 | **3** | 7 |
| 6 | 1 | **5** |

**№ 7.21.** Решение:

А) Усмотреть, что последняя цифра в первом числе – это 0 или 5, а первая цифра – 3, а затем перебрать несколько вариантов.

Ответ: 385·412=158620.

Б)

```
Ответ: 3125 | 25
              |-----
        -25   | 125
        ----
         62
        -50
        ----
         125
        -125
        ----
           0
```

### 8. Задачи на работу

**№ 8.1.** Решение: Малыш облизывает сам себя в 6 раз (30мин/5мин=6) медленнее, чем его облизывает кот Тоша. Тоша облизывает себя за 20 минут. Следовательно, Малыш оближет кота Тошу за 20мин · 6=120мин=2часа.

# Глава 5. Решения к олимпиадным задачам 6 класса

## 1. Задачи логического характера

**№ 1.1.** Решение: Выясним, сколько полных недель в 44 днях.

Получим 6 недель. В течении этих недель число солнечных дней не зависит от того, когда начнется отдых.

В качестве оставшихся двух дней выбираем четверг и пятницу - солнечные дни.

Следовательно, отправляем туристов утром в четверг.

Ответ - С.

**№ 1.2.** Решение: В сумме в них были 30 + 26 + 32 + 31 + 28 + 36 = 183 школьника. Число школьников, игравших хотя бы один раз, равно 183 – 53 – 24 – 9 – 3 – 1 = 93. Оставшиеся 127 школьников были зрителями.

Ответ: 127 зрителей.

**№ 1.3.** Решение: Только английским владеет 13 человек, только французским – 30, только немецким – 20 человек. 20 человек не знают ни одного из этих языков.

Ответ:20 туристов.

**№ 1.4.** Решение: Таблица примет вид:

| **Имя** | **Рукоделие** | | |
|---|---|---|---|
| | шитьё | вязание | макраме |
| Вера | - | - | + |
| Надя | + | - | - |
| Люба | - | + | + |

**Ответ:** Вера занимается макраме, Надя – шитьём, Люба – вязанием.

**№ 1.5.** Решение:

| **Имя** | **Футбольная** | **Баскетбольная** | **Волейбольная** | **Бокс** | **Плавание** |
|---|---|---|---|---|---|
| Андрей | - | - | - | + | - |
| Борис | - | + | - | - | - |
| Владимир | + | - | - | - | - |
| Геннадий | - | - | + | - | - |
| Дмитрий | | - | - | - | + |

**Ответ:** Андрей занимается боксом, Борис – баскетболом, Владимир – футболом, Геннадий – волейболом, Дмитрий – плаванием.

**№ 1.6.** Решение: Составим таблицу, в столбцах которой отметим возможные цвета рубашек и туфель клоунов (буквами К, З и С обозначены красный, зеленый и синий цвета). Будем заполнять таблицу, используя условия задачи. Туфли Бама зеленые, а рубашка не является зеленой. Ставим знак + в клетку 2-й строки и 5-го столбца, и знак - в клетку 2-й строки и 2-го столбца. Следовательно, у Бима и Бома туфли уже не могут быть зелеными, так же как не могут быть туфли Бама синими или красными. Отметим все это в таблице (см. табл. 1).

| Рубашки | | | | Туфли | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Бим | | | | + | - | - |
| Бам | | + | | - | + | - |
| Бом | - | | | - | - | + |
| | К | З | С | К | З | С |
| Таблица 1 | | | | | | |

| Рубашки | | | | Туфли | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Бим | + | - | - | + | - | - |
| Бам | - | - | + | - | + | - |
| Бом | - | + | - | - | - | + |
| | К | З | С | К | З | С |
| Таблица 2 | | | | | | |

Далее, туфли и рубашка Бома не являются красными, отметим соответствующие ячейки таблицы знаком «-». Из таблицы, заполненной на этом этапе, видим, что красные туфли могут быть только у Бима, а, следовательно, туфли Бома - синие. Правая часть таблицы заполнена, мы установили цвета обуви клоунов (табл.1). Цвет рубашки Бима совпадает с цветом его туфель и является красным. Теперь легко устанавливается владелец зеленой рубашки - Бом. Бам, в таком случае, одет в рубашку синего цвета.

Мы полностью заполнили таблицу, в которой однозначно устанавливаются цвета туфель и рубашек клоунов (см. табл. 2): Бим одет в красную рубашку и красные туфли, Бам в синей рубашке и зеленых туфлях, Бом в зеленой рубашке и туфлях синего цвета.

Ответ: Бим одет в красную рубашку и красные туфли, Бам в синей рубашке и зеленых туфлях, Бом в зеленой рубашке и туфлях синего цвета.

**№ 1.7.** Решение: Через два часа под водой будут те же 4 ступеньки, потому что во время прилива лестница поднимается вместе с пароходом.

**№ 1.8.** Решение: Золушка взяла зернышко из мешка с надписью «*СМЕСЬ*». Так как ни одна табличка не соответствовала содержимому мешка, то там был мак или просо.

Если взятое Золушкой зернышко – мак, то в мешке с надписью «*СМЕСЬ*» − *мак*. Тогда в мешке с надписью «*МАК*» − *просо*, а в мешке с надписью «*ПРОСО*» − *смесь*.

Если взятое зернышко – просо, то в мешке с надписью «*СМЕСЬ*» − *просо*. Тогда в мешке с надписью «*МАК*» − *смесь*, а в мешке с надписью «*ПРОСО*» − *мак*.

**№ 1.9.** Решение: Джон сказал: « Я не виновен». По условию задачи два человека являются невиновными: лжец и шутник. Джон не может быть лжецом, так как лжец, в данном случае, сказал бы, что он виновен. Ж джон не может быть и правдолюбцем, так правдолюбец виновен, и он не может сказать неправду. Остается, что Джон шутник, при этом он говорит правду, так как он, действительно невиновен. Джек подтверждает невинность шутника Джона, т.е. Джек говорит правду, поэтому он не лжец, а правдолюбец, Джек и угнал машину. Джо – лжец и как положено лжецу, он всех обманывает, говоря, что он угнал машину.

**№ 1.10.** Решение: В силу своей рассеянности, хозяйка не могла посадить в ящик с названием «Цветы» ни ромашки, ни колокольчики. Следовательно, она посадила в этом ящике огурцы. Теперь осталось ей посадить ромашки и колокольчики. Для них осталось два ящика с надписями: «Ромашки» и «Огурцы».

Но рассеянная хозяйка не посадила ромашки в ящик с названием «Ромашки», как они того они заслуживали, а посадила их в ящик под названием «Огурцы». А колокольчики она посадила в ящик с надписью «Ромашки».

**№ 1.11.** Решение: Сначала найдем возраст мальчика. Поскольку в детский сад ходит девочка, то это не Коля. Тогда Коле больше 5 лет. Так как Галя старше Коли, то Коле не может быть 15 лет. Если сумма лет Гали и Вали делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это возможно в следующих случаях:

1) одной девочке 5, а другой 13 лет;

2) одной девочке 8, а другой 13 лет.

В обоих случаях одной из девочек 13 лет, следовательно, Коле не может быть 13 лет. Зная, что Коле не 5, не 15 и не 13 лет, приходим к выводу, что мальчику 8 лет.

Теперь установим возраст каждой девочки. Поскольку сумма лет Гали и Вали делится на три, а Коле 8 лет, этим двум девочкам 5 и 13 лет. А так как по условию Галя старше Коли, то Гале 13 лет. Тогда Вале должно быть 5 лет, а Тане 15 лет.

**№ 1.12.** Решение: Пусть из города А в В туристы могут выбрать двумя способами. Далее в каждом случае они могут проехать из В в С тремя способами. Значит, имеется 2·3 вариантов маршрута из А в С. Так как из города С на пристань можно попасть двумя способами, то всего существует 2·3·2=12 способов выбора туристами маршрута из города А к пристани.

**№ 1.13.** Решение: 1) 32–15=17 – столько человек ходят только на кружок.

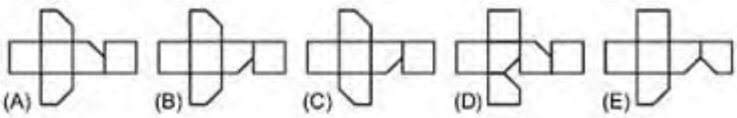
2) 17+21=38 – столько человек ходят или на секцию, или на кружок, или туда и туда.

3) 40–38=2 – никуда не ходят

Ответ: 2.

**№ 1.14.** Ответ В.

**№ 1.15.** Решение:




Ответ: Е.

## 2. Задачи на числовые зависимости.

**№ 2.1.** Решение: Найти наименьшее натуральное число, которое делится на все четные числа от 2 до 18, означает найти наименьшее общее кратное этих чисел. Для этого разложим указанные числа на простые множители и выберем из них все простые делители в максимальных степенях.

Произведение полученных делителей и даст нужное число.

Таким образом, имеем:

2, $4=2^2$, $6=2\cdot3$, $8=2^3$, $10=2\cdot5$, $12=2^2\cdot 3$, $14=2\cdot7$,

$16=2^4$, $18=2\cdot3^2$

Следовательно, искомое число есть $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$.

Ответ: 5040.

**№ 2.2.** Решение: НОД(424,477)=НОД(424;53)=53

53 человека в автобусе,

424:53=8 автобусов,

477:53=9 автобусов

Всего 17 автобусов.

**№ 2.3.** Решение: Выясним, сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39, результат будет меньше 857. Значит в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет: 1 + … + 40 = 820; 857 – 820 = 37.

Ответ: на 37 место.

**№ 2.4.** Решение: Рассуждаю, начиная с конца, чтобы пройти из сада через последние ворота, крестьянин должен иметь 4 яблока, так как половина этих яблок и ещё одно 4 : 2 +1 = 3 яблока он отдаст сторожу и у него останется 4 – 3 = 1 яблоко. Подходя из сада ко вторым воротам, у крестьянина должно быть по условию задачи 2•(4 + 1) = 10 яблок, подходя к первым воротам яблок, было 2•(10 + 1) = 22.

Ответ: 22 яблока должен взять крестьянин, чтобы после того, как он отдаст положенную часть 3 сторожам, у него осталось одно яблоко.

**№ 2.5.** Решение: На уху пошло 6 окуней, то есть каждому досталось по 2. Первый съел свои 2 окуня, то есть сколько дал, столько и съел. Значит, третий съел два окуня из улова второго рыбака. Следовательно, все деньги должен взять второй рыбак.

**№ 2.6.** Решение: Может. При первой переправе нужно перевезти козу, при второй – волка (или капусту), при возвращении нужно взять с собой козу (ее нельзя оставить ни с волком, ни с капустой), оставив козу на берегу, перевезти капусту (или волка), после чего вернуться за козой.

Ответ: может.

**№ 2.7.** Решение: Пусть x — цифра десятков, y — цифра единиц искомого числа. Тогда само число равно $10x+y$. Из условия следует, что $x + y = 12$ и $10x + y + 36 = 10y + x$. Получаем систему двух уравнений, которую можно решить методом подстановки: выразить из первого уравнения x и подставить во второе полученное выражение. В результате, $x = 4$ и $y = 8$.

Ответ: 48.

**№ 2.8.** Решение: Пусть цифра единиц истинного множителя есть x (x — целое число, меньшее 10); тогда цифра десятков есть 3x, а сам множитель равен $3 \cdot 10x + x = 31x$. Ошибочно записанный множитель был $10x + 3x = 13x$. Истинное произведение равно $78 \cdot 31x$, ошибочно полученное произведение есть $78 \cdot 13x$. По условию $78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808$, откуда $x = 2$. Значит, истинный множитель равен 62, а истинное произведение равно 4836.

**№ 2.9.** Ответ: $125 = 5^3$, 521 – простое число.

**№ 2.10.** Решение:

Правильные несократимые дроби со знаменателем 8: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$.

Дополнительный множитель: $1000:8=125$. Тогда

$\frac{1}{8}=\frac{125}{1000}=0{,}125$; $\frac{3}{8}=\frac{375}{1000}=0{,}375$; $\frac{5}{8}=\frac{625}{1000}=0{,}625$; $\frac{7}{8}=\frac{875}{1000}=0{,}875$.

Ответ: $0{,}125$; $0{,}375$; $0{,}625$; $0{,}875$.

**№ 2.11.** Решение: 1 + (2 + 3 + 4) . (5 + 6) = 100. Есть и другие решения (попробуйте найти ещё хотя бы одно).

Их разность также делится на искомое число: 96-72=24.

Следовательно, искомое число — 24, так как на него делится и 96, и 72.

**№ 2.12.** Решение: ((1+77)+(2+76)+…+(38+40))+39=78*38+39=3003.

**№ 2.13.** Решение: (55 − 5) × (5 × 5 − 5) = 1000

5 × (5 + 5) × (5 × 5 − 5) = 1000

(5 + 5) × (5 + 5) × (5 + 5) = 1000.

**№ 2.14.** Решение: Обозначим искомое число через x и запишем уравнение: 4x + 15 = 15x + 4. Решая это уравнение, получим: 11 = 11x, или x = 1.

**№ 2.15.** Решение: Если количество нечетных чисел нечетное, то можно стереть любое из них и сумма чисел будет четным числом. Если же количество нечетных чисел четное, то при стирании любого из них сумма оставшихся чисел нечетная.

**№ 2.16.** Решение: В обоих случаях — как при делении искомого числа на 7, так и при делении его на 9 остаток на единицу меньше делителя. Увеличив делимое на 1, получим число, которое делится без остатка и на 7, и на 9. Наименьшее такое число — 63. Искомое число на 1 меньше и равно 62.

**№ 2.17.** Решение: Задача решается с конца:

1) 300:2=150, 2)150-2=148,

3) 148:2=74, 4) 74-2=72,

5) 72:2=36, 6) 36:2=18,

7) 18-2=16, 8) 16:2=8,

9) 8:2=4, 10) 4:2=2,

11) 2:2=1.

## 3. Полуинварианты.

**№ 3.1.** Решение: После подхода первой девочки количество оставшихся платков либо 19, либо 21 (нечетное количество); после подхода второй девочки – либо 18, либо 20, либо 22 (четное количество); после подхода третьей девочки – либо 17, либо 21, либо 23, либо 19 (нечетное количество). После подхода 17 девочки остается нечетное количество платков. Получается противоречие. Значит, 10 платков остаться не может.

**№ 3.2.** Решение: 14+2 = 16

Ответ: 16.

**№ 3.3.** Решение: Так как число ягод на соседних кустах отличается на единицу, то эти числа разной четности. Следовательно, кусты с четным числом и кусты с нечетным числом ягод чередуются, т.е. имеются 10 кустов с нечетным числом ягод и 10 кустов с четным числом. Но тогда сумма всех ягод будет четным числом, так как сумма четного числа нечетных чисел – четна.

Ответ: нет.

**№ 3.4.** Решение: Предположим, что нашлись такие натуральные числа m и n, что (m-n)·m·n=45045.

Поскольку число 45045 – нечетно, то числа m и n – нечетные.

Но тогда их разность (m-n) – есть число четное и всё произведение тоже четное, вопреки нашему предположению.

Ответ: не могло.

**№ 3.5.** Решение: Если сумма двух натуральных чисел равна третьему, то сумма этих чисел –четна. Поэтому, если бы указанное разбиение существовало бы, то сумма всех 30 чисел равнялась бы сумме десяти четных чисел и была бы четной. Но сумма чисел 1+2+…+30 = 31·15 = 465 нечетна.

Ответ: нельзя.

**№ 3.6.** Решение: Второму игроку достаточно повторять ходы первого, но только в другой кучке. Таким образом, только после ходов второго в количество предметов в кучках становится равным, следовательно, ситуация, когда в обеих кучках не останется ни одного предмета, также может наступить только после хода второго, а, значит, он не проиграет. Поскольку с каждым ходом количество предметов в кучках уменьшается, игра закончится, и так как второй не проиграет – он выиграет.

**№ 3.7.** Решение: Предположим, что нужно собрать все селедки в 1 секторе, тогда селедку второго сектора можно передвинуть или 1 или 5 ходами; из третьего сектора – или 2 или 4 ходами; из пятого сектора – 2 или 4 ходами; из четвертого сектора - 3 ходами; из шестого – 1 или 5 ходами. В любом случае количество ходов будет нечетным, значит, за 20 ходов собрать селедки нельзя.

Ответ: нельзя.

**№ 3.8.** Решение: Минимальное число конфет у участников не уменьшается, а максимальное может увеличиться лишь на единицу, если оно нечетно (если же оно четно, то оно не изменятся). Если в начале игры максимальное число конфет у одного участника было равно , то в любой момент общее число всех конфет у детей не превосходит , если детей . Следовательно, начиная с некоторого момента ведущий перестанет добавлять конфеты, а значит, число конфет у всех участников будет четно. Рассмотрим теперь в качестве полуинварианта величину , где — максимальное число конфет у одного участника игры, а — число детей, у которых конфет. Если у детей различное число конфет, то данная величина убывает. Но она всегда целая неотрицательная, а значит, принимает конечное число значений.

**№ 3.9.** Доказательство.

Так как произведение чисел в каждой строке квадрата отрицательно, то и произведение всех чисел в этом квадрате будет отрицательно. Но, с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах. А так как произведение всех чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

**№ 3.10.** Решение: Витя Иванов мог рассуждать так:

— Докажу методом от противного. Принесу в класс много веревок. Попрошу каждых двух друзей взять в руки по концу веревки, соединяющих их. А всего в классе 35×11=385 концов. Но у веревки два конца, и общее число концов тоже должно быть четным. Получается противоречие.

Ответ: такого распределения друзей быть не может.

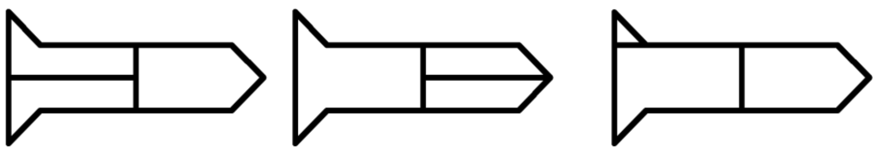
**№ 3.11.** Решение: Масса приготовленного теста выражается числом, которое делится на 20 или на 25. Наименьшее общее кратное чисел 20 и 25 — 100. Если предположить, что в замесе 100 граммов теста, то на один калач должно уходить на 1 грамм теста больше, чем по условию. Следовательно, теста в замесе было в 10 раз больше, т.е. 1 килограмм.

**№ 3.12.** Решение: Если вести сквозной отсчет этажей, начиная с первого подъезда, то Коля живет на 21-м этаже [83 : 4] = 20 (3). В своем подъезде Коля живет на 5-м этаже, поэтому в подъездах, предшествующих Колиному, 16 этажей. 16 делится лишь на числа, кратные 2-м, поэтому в доме может быть либо 16 этажей, либо 8 этажей (вариант четырехэтажного дома исключаем, поскольку Коля живет на 5 этаже). Вася живет на 43 этаже, считая от первого этажа первого подъезда [169 : 4] = 42 (1). Значит в подъездах, предшествующих Васиному, 40 этажей. 40 делится на 8, но не делится на 16, следовательно, в доме 8 этажей.

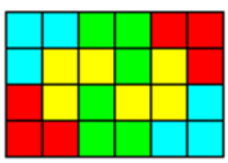
**№ 3.13.** Решение: Задача решается с конца. Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было ещё 24 копейки, а до перехода третьего моста – 12 копеек. Тогда после перехода второго моста у бездельника было12 = 24 = 36 копеек, а до перехода второго моста – 36:2 = 18 копеек. Рассуждая аналогично, получим, что после перехода первого моста у бездельника стало 18 +24 = 42 копейки, а перед переходом первого моста – 42 : 2 = 21 копейка. Таким образом, у бездельника сначала была 21 копейка.

## 4. Разрезания. Замощения.

**№ 4.1.** Решение: Например, любым из приведенных ниже трех способов

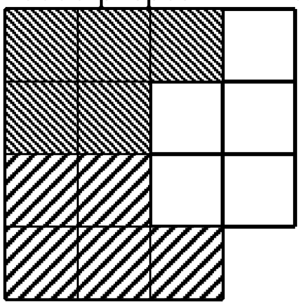


**№ 4.2.** Решение:

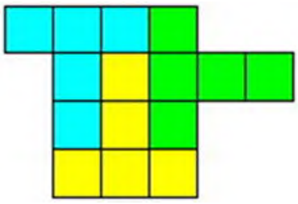


**№ 4.3.** Решение:

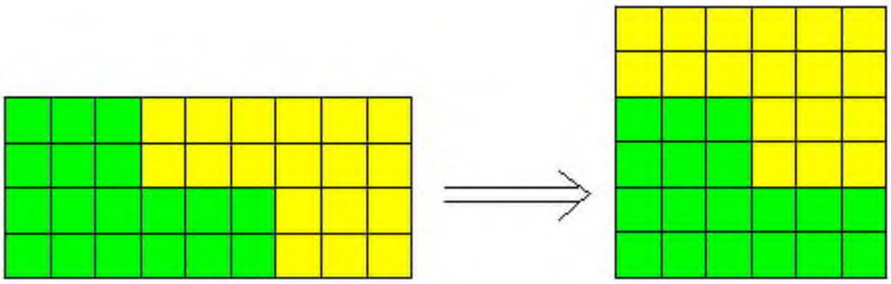
Способ разрезания показан на рисунке.



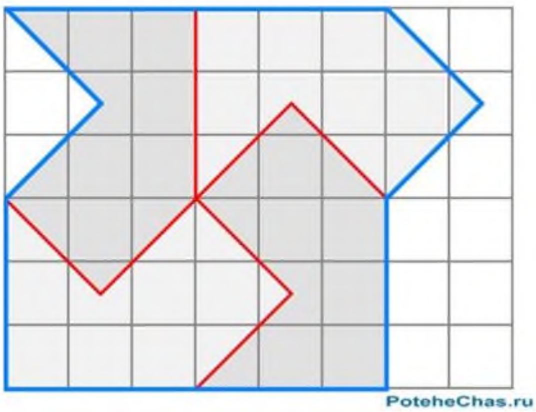
**№ 4.4.** Решение:



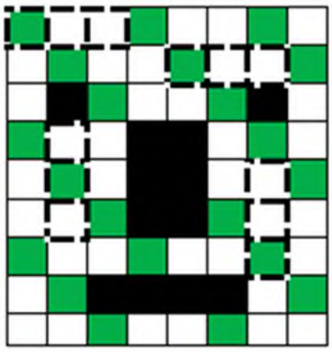
**№ 4.5.** Решение;



**№ 4.6.** Решение:



№ 4.7. Решение:



1) В фигуре содержится 8х9-12=60 клеток, которые надо разрезать на 60:3=20 прямоугольников, состоящих из трех клеток.

2) Закрасим зеленым цветом клетки в фигуре как показано на рис.1.

3) Любой прямоугольник из трех клеток всегда содержит одну и только одну закрашенную клетку. Примеры расположения прямоугольников также показаны на рис.1.

4) Но закрашенных клеток на фигуре оказалось 21, а прямоугольников должно быть 20. Получилось противоречие. Значит, эту фигуру нельзя разрезать на прямоугольники, состоящие из трех клеток.

Ответ: нельзя разрезать.

**№ 4.8.** Решение: Если бы это было возможно, то конь должен был бы попасть в среднюю клетку, но тогда ему вообще некуда ходить на данной части доски, и в эту клетку, значит, он попасть не может.

**№ 4.9.** Решение:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | | |
| 4 | 4 | | |

## 5. Задачи на движение.

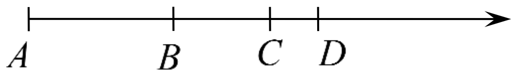
**№ 5.1.** Решение: Если мальчик побежит к остановке А, то он прибежит туда одновременно с приходом трамвая. Так как мальчик был от остановки В вдвое дальше, чем от А, то, если он побежит к В и пробежит полдороги, трамвай как раз подойдет к остановке А. После чего трамвай и мальчик одновременно прибудут на остановку В, но трамвай проходит при этом путь, втрое больший, чем пробегает мальчик. Значит, скорость мальчика равна 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч.

**№ 5.2.** Решение: Пусть L м - длина платформы (и поезда), v м/с - скорость поезда, t с - время, за которое поезд проедет мимо неподвижного наблюдателя. Если начало поезда обозначить за точку А, то при прохождении поезда мимо платформы точка А проходит расстояние 2L со скоростью поезда. Поэтому

2L=32v. Для случая с неподвижным наблюдателем верно равенство L=vt. Из этих двух уравнений находим t=16.

**№ 5.3.** Решение:




Изобразим путь пассажира отрезками.

Обозначим за $s$ длину отрезка $CD$, тогда $BC = 2s$ (пока спал), всего $BD = 3s$. Но $AB = BD$, значит, $AD = 6s$. Бодрствовал пассажир на $AB$ и $CD$. Тогда $AB + CD = 3s + s = 4s$.

Пассажир бодрствовал $\frac{4s}{6s} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ пути.

Ответ: $\frac{2}{3}$ пути.

**№ 5.4.** Решение: Валентин пробегает 50 ∗ 60 = 3000 см за 100 с, то есть его скорость 30 см/с, что составляет 18 м/мин.

**№ 5.5.** Решение: Если Петя выйдет из дома раньше Вани на 2ч 45 мин, то со скоростью 4 км/ч он за это время пройдет.

**№ 5.6.** Решение:

$2\ \frac{3}{4} \times 4 = \frac{11}{4} \times 4 = 11$

15-4=11(км/ч)- скорость сближения мальчиков

11÷11=1(ч)-будет в пути Ваня

1×15=15(км)- расстояние от дома мальчиков до деревни бабушки

Ответ:15 км.

**№ 5.7.** Решение: Пусть S – длина пути, v –скорость автомобиля на первой половине пути. Тогда, скорость автомобиля на второй половине пути равна $1{,}25 \cdot v$; и , поскольку выигрыш во времени происходит только на второй половине пути, то $\frac{S}{1{,}25v} = \frac{S}{v} - \frac{1}{2}$;

Зная, что $\frac{S}{v} = t$ находим $t = 2{,}5$ часа. Следовательно, автомобмль был в пути 2,5 + 2 = 4,5 часа.

Ответ: 4,5 часа.

**№ 5.8.** Решение:

Первый способ решения.

1)72 + 68 =140 (км /ч.) – <u>скорость сближения</u> таксистов.

2)140 2 = 280 (км) – на такое расстояние таксисты приблизятся друг к другу за 2 часа.

3)345 – 280 = 145 (км) – на таком расстоянии будут таксисты через 2 часа.

Ответ: 145 км.

Второй способ решения.

1)72 2 =144 (км) – такое расстояние проедет один таксист за 2 часа.

2) 68 * 2 = 136 (км) – такое расстояние проедет другой таксист за 2 часа.

3)144+ 136 =280 (км) – на такое расстояние таксисты приблизятся друг к другу за 2 часа.

4)345 – 280 = 145 (км) – на таком расстоянии будут таксисты через 2 часа.

Ответ: 145 км.

**№ 5.9.** Решение: 1)80*2=160(км) -прошёл скорый поезд за 2 часа.

2)720-160=560(км) -осталось пройти поездам.

3)80+60=140(км/ч) -скорость сближения 2 поездов.

4)560:140=4(ч) -был в пути пассажирский поезд.

Ответ:4часа.

**№ 5.10.** Решение: До встречи охотников пройдёт два часа, за это время собака пробежала 16 км.

**№ 5.11.** Решение: Два человека (A и B) едут на мотоцикле и проезжают 50 км, а третий человек (C) идёт пешком и проходит 5 км.

**№ 5.12.** Решение: Два человека (A и C) на мотоцикле добираются до пункта назначения. Человек (B) проходит ещё 5 км и оказывается в пункте назначения.

Ответ: Могут

## 6. Задачи на проценты.

**№ 6.1.** Решение:

$0{,}1 \cdot 140+0{,}3 \cdot 60=32$ (гр.)-масса мыла в растворе

140+60=200(гр.)-масса раствора

$32/200 \cdot 100=16\%$-содержание мыла в растворе

Ответ: да.

**№ 6.2.** Решение: 1,2x – сторона,

$4 \cdot 1{,}2x - 4 \cdot 1x = 0{,}8x$; 0,8 = 80% - периметр,

$1{,}2x \cdot 1{,}2x - x \cdot x = 1{,}44x^2- x^2= 0{,}44x^2$; 0,44=44% - площадь.

Ответ: периметр увеличился на 80%, площадь - на 44%.

**№ 6.3.** Решение: Из условия задачи следует, что

2A/100>3B/100, откуда 2A>3B, или 10A>15B>14B. Из последнего неравенства имеем: 5A>7B, или 5A/100>7B/100. Таким образом, 5% числа A больше 7% числа B.

Ответ: 5% числа A больше 7% числа B.

**№ 6.4.** Решение:

1)( 200 · 16) : 100= 32 (кг) составляет вес воды в 200 кг сырого зерна;

2) 32 -20 =12 (кг) составляет вес оставшейся воды в зерне;

3) 200 – 20 = 180 (кг) стало весить зерно;

4)12 : 180 = 0, 067.. (ч) – составляет влажность после просушки.

5) 0.067 · 100% = 6,7…%

Ответ: 6,7 % составляет влажность после просушки.

**№ 6.5.** Решение: Примем бывшую цену билета за 1, тогда повышенная цена билета составит 1,4. Пусть «дешевый» спектакль посетило m человек, а «дорогой» - n человек. Тогда выручка театра за «дешевый» спектакль составит m, а за «дорогой» - 1,4n. Согласно условию, 1,4n : m = 0,84. Значит, n : m = 0,84 : 1,4 = 0,6. Следовательно, если принять m за 100%, то n составит 60% от m, т.е. число зрителей театра уменьшилось на 40%.

Ответ: на 40%.

**№ 6.6.** Решение: Увеличение на 10% означает умножение на 1,1. Уменьшение на 10% означает умножение на 0,9. 8019 = 36•11 = 9•9•9•11. Поэтому после трёх промахов и одного попадания у игрока будет 100•(0,9)3•1,1 = 80,19 руб.

Ответ: Могло.

**№ 6.7.** Решение: Пусть у младшего x рублей, тогда у старшего 1,25x. Чтобы у них стало одинаково, старший должен отдать 0,125x рублей. Итак, 1,25x = 100%

1,125 x = ?%

Получили 90%, значит отдать старший брат должен 10% своих денег.

**№ 6.8.** Решение:

Пусть $x$ – натуральное число, на которое делим число 180, $y$ – частное, $0,25y$ – остаток.

Тогда $180 : x = y(\text{î ñò}\ \ 0,25y)$ или $180 = x \cdot y + 0,25y$.

Так как $0,25 = \dfrac{1}{4}$, то число $y$ делится на 4. Следовательно, $y$ может принимать следующие значения: 4; 8; 12; 16; 20; 24 и т.д.

1) Если $y = 4$, то

$4x+\frac{1}{4}\cdot 4=180$,

$4x=179$,

$x=44,75$ – не является натуральным числом.

2) Если $y=8$, то

$8x+\frac{1}{4}\cdot 8=180$,

$8x=178$,

$x=22,25$ – не является натуральным числом.

3) Если $y=12$, то

$12x+\frac{1}{4}\cdot 12=180$,

$12x=177$,

$x=14,75$ – не является натуральным числом.

4) Если $y=16$, то

$16x+\frac{1}{4}\cdot 16=180$,

$16x=176$,

$x=11$.

Значит, $x=11$, т.е. число 180 надо разделить на 11, чтобы остаток составлял 25 % частного: $180:11=16(\text{î ñò}\ \ 4)$.

Ответ: 11.

**№ 6.9.** Решение: Поскольку число школьников, получивших ту или иную оценку, всегда целое, то для решения задачи нам надо найти целое число, меньше 50, одновременно делящееся на 7, 3, 2.

Единственным возможным ответом является число 42. Это значит, что всего в классе 42 ученика. 6 из них получили девятки, 14- восьмерки, 21 – семерки. Следовательно, ниже семерки получил 1 ученик.

**№ 6.10.** Решение:

1) 48 : 100 = 0,48 (л) 1% от 48 литров;

2) 0,48 * 21 = 10,08 (л).

Ответ: сливок получится 10,08 литров.

**№ 6.11.** Решение:

1) 72 : 80 = 0,9(очков) 1% от всех возможных очков;

2) 0,9 * 100 = 90 (очков).

Ответ: на олимпиаде можно набрать 90 очков.

**№ 6.12.** Решение: Свежий арбуз на 99% процентов состоит из жидкости и на 1% — из сухой массы. В результате усушки количество жидкости уменьшилось и составило 98% от новой, также уменьшившейся массы арбуза. Количество же сухого вещества, оставаясь неизменным, составило 2% от новой массы арбуза. Процентное содержание в арбузе сухого вещества (при неизменной его массе) увеличилось вдвое. Следовательно масса арбуза в результате усушки уменьшилась вдвое.

**№ 6.13.** Решение: 1,2a*0,4b+0,32c*1,5d = 96; 0,48 a*b+0,48 c*d = 96; 0,48(a*b + c*d)=96; a*b + c*d = 200.

Ответ:200.

**№ 6.14.** Решение: Пусть первоначальный уровень воды в реке x. Тогда уровень воды в феврале стал x- 0,25 x= 0,75 x; 0,75 x + 0,2*0,75 x = 0,9 x - уровень воды в марте; 0,9 x – 0,1*0,9 x = 0,81 x - уровень воды в апреле; 0,81 x + 0,2*0,81 x = 0,972 x - уровень воды в мае.

x>0,972 x; 0,972 = 97,2%, 100% - 97,2% = 2,8%.

Ответ: уровень воды в реке уменьшился на 2,8%.

## 7. Иллюстративные задачи

**№ 7.1.** Решение:

1.Версия 1. В первой строчке первую цифру числа 351 заменим на последнюю и получим 151. Но эта операция неосуществима для чисел второй строчки. Значит, версия 1 не даёт решений.

2. Версия 2. Числа второй колонки читаются как слева направо, так и справа налево.

3. Версия 3. Подберём слово, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево, и состоит из пяти букв, «ЗАКАЗ».

Ответ: ЗАКАЗ.

**№ 7.2.** Решение:

Решим уравнение: а) x +5 = 8, x = 3; б) x – 12 = 22, x =34.

Тогда таблица примет вид:

| | | |
|---|---|---|
| АВГУСТ | 3 | УСТАВ |
| 8052917 | 34 | ? |

Слова «АВГУСТ» и «УСТАВ» записаны одинаковыми буквами, только третья (3) буква слова «АВГУСТ» отсутствует в слове «УСТАВ», и порядок букв изменён: три последние буквы стали первыми, а две первые – последними.

Выполним подобные операции для чиста 8052917: а) вычеркнем третью и четвертую цифры (34) и получим 80917; б) меняем местами три последние и две первые на оставшихся цифр, получаем 91780.

Ответ: 91780.

## 8. Принцип Дирихле

**№ 8.1.** Решение (метод от противного): Предположим, что такой месяц не найдется. Тогда в каждом из 12 месяцев года отмечают свой день рождения не более трех одноклассников. В этом случае учащихся всего не более $12 \cdot 3 = 36$ , что противоречит условию задачи. Наше предположение неверно, значит, найдется месяц, в котором день рождения не менее чем у четырех учеников этого класса.

Решение (с использованием принципа Дирихле): Докажем, что такой месяц найдется. Поскольку каждому ученику соответствует ровно один месяц, в котором он родился, то роль «клеток» играют месяцы года (их 12), а роль «кроликов» – учащиеся (их 40). По принципу Дирихле найдется клетка, в которой сидит не менее чем 12 40 кроликов, т.е. 4 кролика. Следовательно, найдется месяц в году, в котором не менее 4 учащихся класса отмечают свой день рождения.

**№ 8.2.** Решение: Поскольку каждому жителю Москвы соответствует определенное количество волос на голове, то жители будут играть роль зайцев, а количество волос – роль клеток (их 150 001: можно пронумеровать от 0 до 150 001), каждый «кролик» попадает в ту «клетку», которая соответствует количеству волос у него на голове. Поскольку в 150 001 «клетке» сидит более 59·150001·8850059 «кроликов», значит хотя бы в одной сидит не менее 60 «кроликов». Следовательно, по принципу Дирихле, в Москве есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове.

**№ 8.3.** Решение: Количество матчей, сыгранное каждой командой, изменяется от 0 (в начале первенства) до 11 (в конце первенства). Если предположить, что к какому-то моменту состязаний все команды сыграли разное количество матчей, то это означает, что одна команда еще не сыграла ни одного матча, вторая – 1, третья – 2, …, двенадцатая – все 11 матчей. Тогда получается, что двенадцатая команда сыграла уже со всеми командами, а первая – ни с одной. Получили противоречие. Следовательно, в любой момент состязаний хотя бы две команды сыграли равное количество матчей.

**№ 8.4.** Решение: Весь ковер можно накрыть такими заплатками.

($1м^2 = 10000см^2$,$10000см^2$: $(20\times20) = 25$) 25-ю заплатами. «Клетка» - заплатка, «кролики» - дырки. Если одна заплатка закрывает две дырки, то всего закроется 50 дырок, но по условию 51 одна дырка, значит, какая-то из заплаток закроет три дырки.

По принципу Дирихле какая-то из этих заплат накроет не менее трех дырок.

**№ 8.5.** Решение: Перед нами миллион ``кроликов"-елок и, увы, всего лишь 600001 клетка с номерами от 0 до 600000. Каждый ``кролик"-елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как ``кроликов" гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два ``кролика" - если бы в каждой сидело не более одного, то всего ``кроликов"-елок было бы не более 600001 штук. Но ведь, если два ``кролика"-елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

**№ 8.6.** Решение: Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших 35 – 6 = 29 задач. Так как 29 = 4 • 7 + 1, то найдется школьник, решивший не менее пяти задач.

**№ 8.7.** Решение: 16 королей. Разобьём доску на 16 квадратиков, в каждом может быть не более одного короля.

**№ 8.8.** Решение: Предположим противное. Тогда мальчики собрали не меньше, чем
0 + 1 + 2 + … + 15 = 115 орехов. Получили противоречие.

**№ 8.9.** Решение: Предположим, что ящиков с грушами каждого из трёх сортов привезли не более восьми, тогда всего привезли бы 8 · 3 = 24 ящика. Это противоречит условию задачи. Значит, найдутся 9 ящиков с одинаковым сортом груш.

## 9. Задачи на работу

**№ 9.1.** Решение: Управляясь с уборкой за 6 часов, Лена за каждый час работы вымывает 1/6 часть всех полов. В то же время два ее братца успевают за тот же час выпачкать 1/18 часть всех полов. В случае, если вся троица одновременно приступит к работе, ежечасно очищаемая часть пола составит 1/6 — 1/18 = 1/9. Следовательно, уборка продлится 1 : 1/9 = 9 часов.

**№ 9.2.** Решение: Семь волков съедают семь баранов за семь дней, значит один волк съедает одного барана за семь дней. А девять волков съедят девять баранов за те же семь дней.

**№ 9.3.** Решение: Наше условие, по существу, означает, что 20 чёрных коров и 15 рыжих дают за день столько же молока, сколько 12 чёрных и 20 рыжих. А это значит, что 8 чёрных коров дают молока столько же, сколько 5 рыжих. Отсюда заключаем, что у рыжих коров удои больше.

**№ 9.4.** Решение: Сначала заменим время в секундах временем в минутах: 6 минут 40 секунд заменим на 6 + 2/3, или 20/3, а 13 минут 20 секунд заменим на 13 + 1/3, или 40/3. Тогда за одну минуту холодной водой заполнится 3/20 ванны, горячей — 1/8 ванны, а вытечет 3/40 ванны. Следовательно, за одну минуту наполнится (3/20) + (1/8) — (3/40), т.е. (1/5) ванны. Значит, вся ванна наполнится за 5 минут.

# Глава 6. Решения к олимпиадным задачам 7 класса

## 1. Задачи логического характера.

**№ 1.1.** Решение: Приходится анализировать варианты. Это можно делать по-разному. Можно выяснить, возможно ли, чтобы в первом ответе первая часть была правдой, а вторая ложью и так далее. Однако удобнее проверить, возможно ли, чтобы тот или иной мальчик занял то или иное место. Чаще всего в ответах упоминаются Андрей и Геннадий. С любого из них и нужно начать. Начнем, например, с Андрея. Именно рассмотрим, мог ли Андрей занять первое место, мог ли второе, мог ли третье, мог ли четвертое.

Пусть Андрей занял первое место. Тогда в первом ответе первая часть – правда, а значит, вторая часть – неправда, то есть Борис – не второй (но и не первый, так как первый – Андрей), а третий или четвертый. Во втором ответе первая часть – неправда, так как Андрей – не второй, а первый. Значит, во втором ответе вторая часть – правда, откуда получается, что Геннадий – третий. Поэтому Борис – не третий, а четвертый, и мы получаем такое распределение:

Андрей – первый, Вадим – второй, Геннадий – третий, Борис – четвертый. Осталось с этой точки зрения просмотреть третий ответ. "Вадим – второй" – правда, "Геннадий – четвертый" – неправда. Все сходится. Но, быть может, Андрей мог быть и вторым? Нет, так как тогда первый ответ был бы полностью ложным.

Не мог быть Андрей и третьим, так как тогда полностью ложен второй ответ.

Не мог быть Андрей и четвертым, что доказать несколько труднее – нужно сопоставлять разные ответы. Из первого следует, что Борис – второй, из второго – что Геннадий – третий, но тогда полностью лжив третий ответ.

Ответ: Андрей – первый, Вадим – второй, Геннадий – третий, Борис – четвертый.

**№ 1.2.** Решение: Пусть x – глубина ямы, у- высота выступания его головы над копаемой ямой, в момент, когда яма вырыта на половину $x/2+y=180$; $x-y=180$.

Решая систему, находим $x=(360\cdot 2)/3=240$, то есть глубина ямы 2 м 40 см.

**№ 1.3**. Решение: В списке нет царя по имени Петр, следовательно, Павел Петрович был первый из этих царей. Других Павлов нет, следовательно, братья Александр Павлович и Николай Павлович правили сразу после Павла Петровича, сменив на троне один другого. Таким образом, последний царь был Николай Александрович (других Николаев нет). Александр Николаевич не мог править после последнего царя, значит, он унаследовал трон после Николая Павловича, который, следовательно, правил после своего брата Александра Павловича. Тогда наследником Александра Николаевича и отцом Николая Александровича мог быть только Александр Александрович.

Ответ: Павел Петрович, Александр Павлович, Николай Павлович, Александр Николаевич, Александр Александрович, Николай Александрович.

**№ 1.4.** Решение : Если $A = 0$, то либо $B = 0$, либо $B – C = 0$. Ни то, ни другое невозможно.

Поэтому A не 0. Если $B = 0$, то и $A = 0$. Это тоже невозможно.

Поэтому B не 0. Следовательно, $C = 0$, и равенство из условия задачи можно переписать в виде $A = B(B-0) = B2$.

Отсюда следует, что $B < 0$. (- умн. на - даст +) Значит, B отрицательно, а A – положительно.

**№ 1.5.** Решение : Покажем, что расставить числа требуемым образом нельзя.

Допустим, это удалось. Обозначим через X число, стоящее в центральном кружочке.

Все остальные числа стоят в кружочках, образующих два пятиугольника.

Поэтому X + 2B = 1 + ......+ 11 = 66, откуда X = 66 – 2B. Значит, число X должно быть четным.

Теперь сложим все суммы чисел, стоящих на выходящих из центра отрезках.

Получится 5A. При этом число X будет сосчитано пять раз, а все остальные – по одному разу.

Поэтому 5A = 4X + (1 + .......... + 11) = 4X + 66 (*). Значит, число 4X + 66 должно делиться на 5.

Этому условию среди чисел от 1 до 11 удовлетворяют только числа 1, 6 и 11, и при этом только число 6 четно.

Следовательно, X = 6. Подставляя найденное значение X в уравнение (*), находим, что A = 18.

Стало быть, на каждом из пяти выходящих из центра отрезков сумма двух чисел, стоящих там вместе с числом X, должна равняться 18 – 6 = 12.

Получается, что на одном отрезке должны стоять числа 1 и 11, 2 и 10, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7.

Заметим, что три из пяти перечисленных пар состоят из нечетных чисел, а две – из четных.

Поэтому в вершинах каждого из двух пятиугольников должны стоять три нечетных и два четных числа.

Это означает, что число B должно быть нечетным.

Но из доказанного выше равенства X = 66 – 2B при X = 6 получаем B = 30. Противоречие.

**№ 1.6.** Решение: 6 рыбаков за день едят 1 судака. Один рыбак съедает 1/6 судака в день. 10 рыбаков едят за день 10/6 судака. 10 судаков делим на 10/6 судака = 6 дней.

Ответ: за 6 дней.

**№ 1.7.** Решение:

Составим таблицу:

| Имя/класс | 4класс | 5класс | 6 класс | 7 класс |
|---|---|---|---|---|
| Вася | - | - | + | - |
| Коля | + | - | - | - |
| Петя | - | - | - | + |
| Стёпа | - | + | - | - |

1. Шестиклассник не нашел ни одного белого гриба, Петя и ученик 4 класса – 8 штук. Значит, Петя не в 4 и не в 6 классах.

2. Вася и пятиклассник нашли подосиновики и позвали Колю. Вася и Коля не пятиклассники.

3. Семиклассник, шестиклассник и Коля смеялись над Стёпой, сорвавшим мухомор. Коля и Стёпа не шестиклассники и не семиклассники.

5. Коля учится в 4 классе, а остальные не учатся в нем. Степа - в 5 классе, тогда Петя в 7 классе, а Вася в 6 классе.

**№ 1.8.** Решение: Так как первый и второй приятели дали различные ответы, то один из них – лжец, а другой – рыцарь. Кроме того, рыцарь не мог ответить «Нет» на предложенный ему вопрос, так как в этом случае он бы сказал неправду (среди двух оставшихся точно есть лжец). Следовательно, первый – лжец. Он солгал, значит среди двух оставшихся должен быть лжец, и им может быть только третий приятель. Значит третий ответил «Нет».

Ответ : «Нет».

**№ 1.9.** Решение: Разломаем шоколадку на отдельные дольки. Долек будет $5 \times 8 = 40$ штук. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, значит, количество различных кусков шоколадки увеличивается на 1. Вначале это количество было равно 1, а в конце – 40. Значит, игра длится ровно 39 ходов. Последний ход будет ходом первого игрока (его ходы – все с нечетными номерами).

**№ 1.10.** Решение: Предположим, что Сергей занял первое место. Но тогда Алексей не занял первое место и, следовательно, Сергей должен быть на третьем месте. Мы пришли к противоречию; значит предположение о том, что Сергей занял первое место - ложно. Итак, Сергей не занял первое место. Следовательно, Павел занял четвертое место. Известно, что у Сергея место выше, чем у Юрия. Такой случай возможен, если у Сергея второе место, а у Юрия - третье. Значит, первое место занял Алексей.

Ответ: I место занял Алексей, II место — Сергей, III место — Юрий, IV место — Павел.

**№ 1.11.** Решение: Так как 1 сапфир и 2 топаза равны по стоимости 3 изумрудам, то 8 сапфиров и 16 топазов будут равноценны 24 изумрудам. Так как 7 сапфиров и топаз равны по стоимости 8 изумрудам, то 21 сапфир и 3 топаза будут равноценны тем же 24 изумрудам. А тогда получается, что 13 сапфиров равноценны 13 топазам. А это значит, что сапфир и топаз равноценны.

**№ 1.12.** Решение: Так как Вадим и шофер старше Сергея, то Вадим и Сергей – не шофера. Так как Николай и слесарь занимаются боксом, то слесарь – не Николай. Так как Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика, то Антон и Сергей - не токари и не электрики. Отсюда следует, что Сергей может быть только слесарем. Тогда Антон – шофер. Выяснить, кто Николай и Вадим, помогут высказывания: «Вадим и шофер старше Сергея», «электрик – младший из друзей». Значит, Вадим не электрик, поэтому Вадим – токарь, а Николай – электрик.

Ответ: Сергей – слесарь, Антон – шофер, Вадим – токарь, Николай – электрик.

**№ 1.13.** Решение:

1) 18-(2+6+3)= 7 человек посещают только мат. кружок

2) 14-(2+6+1)= 5 посещают только физ. кружок

3)10-(2+3+1)= 4 посещают только хим. кружок

4)36-(2+6+3+1)-(7+5+4)= 8 человек не посещают никаких кружков.

## 2. Задачи на многочлены.

**№ 2.1.** Решение:

$$\begin{aligned}x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= x^4 + x^3 + 2010x^2 + 2009x + 2010 - x^3\\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 2009x^2 + 2009x + 2009 + 1 - x^3 =\\ &= x^2(x^2 + x + 1) + 2009(x^2 + x + 1) + (1 - x)(1 + x + x^2)\\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)\end{aligned}$$

**№ 2.2.** Решение: Переносим слагаемые в левую часть

$(3x + 2)^4 - (3x – 4)^4 = 0$

Разложим на множители по формуле разности квадратов

$((3x + 2)^2 – (3x – 4)^2) \cdot ((3x + 2)^2 + (3x – 4)^2) = 0$

Очевидно, что выражение во вторых скобках не равно нулю ни при каких значениях переменной x. Приравняем нулю выражение в первых скобках

$(3x + 2)^2 – (3x – 4)^2 = 0$

Снова разложим на множители по формуле разности квадратов

$((3x + 2) + (3x – 4)) \cdot ((3x + 2) – (3x – 4)) = 0$

$(6x – 2) \cdot 6 = 0$

$x= \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$ .

**№ 2.3.** Решение: В каждой их скобок произведения следует заменить число 1 на сумму $xy + yz + xz$. Тогда $1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x + y)(x + z)$. Аналогично $1 + y^2 = (x + y)(y + z)$ и $1 + z^2 = (x + z)(y + z)$. Перемножив все эти равенства, получаем $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (x + y)^2(x + z)^2(y + z)^2$, что является полным квадратом.

**№ 2.4.** Решение: Исследуем одно из данных равенств:

$a(b + c) + c = b(c + a) + a \Longrightarrow$

$ab + ac + c = bc + ab + a \Rightarrow$

$ab - ab + ac - bc = a - c \Rightarrow$

$c(a - b) = a - c$. Значит $c = \frac{a-c}{a-b}$.

Аналогично получим:

$$b(a - c) = b - c \Rightarrow b = \frac{b - c}{a - c};$$

$$a(b - c) = b - a \Rightarrow a = \frac{b - a}{b - c}.$$

Тогда перемножим данные числа:

$$abc = \frac{b - a}{b - c} \cdot \frac{b - c}{a - c} \cdot \frac{a - c}{a - b} = -1.$$

Ответ: $-1$.

**№ 2.5.** Решение: Применим несколько раз формулу для разности квадратов

$a^{32} - b^{32} = (a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a + b)(a - b)$.Так как по условию $a - b = 1$,то получаем искомое тождество.

**№ 2.6.** Решение: Разложим первое выражение на множители

$a^2 - c^2 + b(2a + b) = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$. Итак, значение первого выражения делится на значение второго выражения при любых значениях $a, b, c$.

**№ 2.7.** Решение: Заметим, что $x+y+z=0$, значит, $z=-(x+y)$. Подставим z в выражение и преобразуем его. Имеем:

$3xyz - x^3-y^3-z^3= -3xy(x+y) - x^3-y^3+ (x+y)^3 =-3x^2y -3xy^2-x^3-y^3+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=0$

Ответ:0.

**№ 2.8.** Решение:

$$2x^2 + 2x + 2 - x^2 - 3x + 12 = x^2$$
$$2x^2 - x^2 - x^2 + 2x - 3x = -12 - 2$$
$$-x = -14$$
$$x = 14$$

Ответ: 14.

**№ 2.9.** Решение: По условию сумма цифр числа $a$ и числа $9a$ одна и та же. Поэтому согласно признаку делимости на 9 число $a$ делится на 9. Двузначные числа, делящиеся на 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 и 99. Из них числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не обладают требуемым свойством; в этом можно убедиться, умножая их, соответственно, на 7, 8, 7, 3, 4 и 9. Оставшиеся числа требуемым свойством обладают.

## 3. Инварианты и делимость.

**№ 3.1.** Решение: Рассмотрим сумму всех чисел, записанных на доске до и после одного шага. Пусть мы стёрли числа a и b. Тогда сначала сумма всех чисел была равна S+a+b, а потом S+a−b=(S+a+b)−2b, где S — сумма всех остальных чисел. Как видим, замена a+b на a−b не меняет чётности суммы всех чисел. Сумма всех чисел в самом начале есть нечётное число (1999•999), значит, на каждом шаге сумма 10 записанных на доске чисел будет нечётна, а ноль — чётное число, поэтому получить его на доске мы не сможем.

О т в е т: нет.

**№ 3.2.** Решение: Рассмотрим остатки при делении на три исходных чисел — количества камней в кучках. В первой кучке остаток 1, во второй — 0, в третьей — 2. Рассмотрим, что будет происходить с точки зрения остатков, когда мы перекладываем камни:

| 1 кучка | | 2 кучка | | 3 кучка | |
|---|---|---|---|---|---|
| взяли 1 | нов. ост. 0 | взяли 1 | нов. ост. 2 | полож. 2 | нов. ост. 1 |
| взяли 1 | нов. ост. 0 | полож. 2 | нов. ост. 2 | взяли 1 | нов. ост. 1 |
| полож. 2 | нов. ост. 0 | взяли 1 | нов. ост. 2 | взяли 1 | нов. ост. 1 |

Мы нашли инвариант — после любой из операций остатки будут прежние: 0, 1, 2, только уже распределены по-другому. Если же мы сможем собрать все камни в одной кучке, то остатки при делении на 3 во всех кучках будут одинаковые (равны нулю). Следовательно, указанными операциями собрать все камни в одной из кучек нельзя.

О т в е т: нет.

**№ 3.3.** Решение: На каждой стороне написано либо число 1, либо -1, а так как сумма равна нулю, то сторон обоих типов поровну. Обозначим это количество за m, тогда общее число сторон равно n = 2m (то есть четно). Если на стороне написано -1, тогда на концах написано -1 и +1, всего таких сторон m. Пусть есть еще k сторон, на обоих концах которых написано +1, тогда всего на концах всех сторон написано m+2k единиц, при этом каждую вершину на которой написано +1 посчитали дважды. Значит, m+2k - четное число, то есть и m четное, следовательно, n = 2 m делится на 4.

**№ 3.4.** Решение: Пусть газировка стоит А сантиков, а пирожок В сантиков. Тогда 5 А + 16 В делится на 43. Тогда и 15 А + 48 В делится на 43, следовательно, 15 А + 48 В - 43 В = 15 А + 5 В = 5(3А+В) делится на 43. Так как 5 взаимно просто с 43, на 43 должен делиться второй множитель, то есть число 3А+В. А это и есть сумма, которую должен заплатить Малыш.

**№ 3.5**. Решение: Как сказано в условии задачи, одно из этих утверждений является ложным.

В первую очередь на себя обращает внимание условие б).

Если последняя цифра равна 1, то условие а) не верно, так как нет точных квадратов оканчивающихся на 2,

условие в) тоже не может быть верным, так как в этом случае последняя цифра равна 3 и таких точных квадратов нет.

Следовательно, если условие б) верно, то условия а) и в) являются не верными, что не подходит по условию задачи (должно быть два верных и одно неверное утверждение из этих трех).

Следовательно условие б) должно быть ложным, а а) и в) - истинными.

Теперь осталось разобраться с квадратами.

В условиях а) и в) сказано, что А + 51 и А - 38 являются полными квадратами.

Эти квадраты не обязательно могут быть соседними.

Можно легко показать, что если два числа отличаются на число K,

то разность их квадратов делится на это число K тоже.

В нашем случае разность квадратов равна 89 и это число простое,

Последний вариант очевидно не подходит, а проверка первого варианта приводит к ответу А=1974.

следовательно эти числа могут отличаться только на 1 или 89.

Ответ: A = 1974.

**№ 3.6.** Ответ: 551; 155; 515.

**№ 3.7.** Решение: Решение: Чтобы число делилось на 72, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8 и на 9. Чтобы число делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось число, составленное из трех последних его цифр в том же порядке. Для числа 17* это 176, то есть последняя цифра 6. Для делимости на 9 необходимо и достаточно, чтобы сума цифр числа делилась на 9. Вместо оставшейся звездочки может стоять только 2.

Ответ: 322357176.

**№ 3.8.** Решение. Заметим, что зачёркнута была последняя цифра, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра числа была бы нулевой. Пусть y– последняя цифра исходного числа, x– пятизначное число после зачёркивания. Тогда полученное число равно $10x+y–x = 9x+y=654321$. Деля это число на 9 с остатком (и учитывая, что y не превосходит 9), получим остаток $y=3$ и частное $x=727\ 02$.

Ответ. 727 023.

**№ 3.9.** Решение:

а) Вычитая эти два числа $2a+b$ и $2b+a$, получаем, что разность $a– b$ делится на 10, т.е. a и b оканчиваются на одну и ту же цифру.

б).Можно взять, например, $a=1$ и $b=6$, тогда оба числа $3a+b$ и $3b+a$оканчиваются на 9.

Ответ. а) Да, обязательно, б) нет.

**№ 3.10.** Решение: По условию задачи длина шага отца – 70 см, сына – 56 см. Найдет расстояние, которое должен пройти каждый, чтобы произошло первое совпадение шагов. Это наименьшее число, которое одновременно делится на 70 и 56, т.е. НОК (70, 56).

НОК (70,56) = 280, значит пройдя 280 см произойдет первое совпадение шагов сына и отца.

По условию задачи, следы идущих совпали 10 раз, значит отец и сын прошли расстояние, равное $10 \cdot 280 = 2800$ (см), или 28 м которое и будет расстоянием между двумя деревьями.

Ответ: 28 м.

**№ 3.11**. Решение: По условию задачи, расстояние, которое измеряли дети равно 143 м или 14300 см. Так как при измерении их шаги совпали 20 раз, то первое совпадение произошло на расстоянии, равном 14300 : 20 = 715 см. Пусть длина шага девочки X см ($X > 0$). Тогда 715 см должно делиться нацело на X см и на 65 см. Значит 715 см это наименьшее общее кратное X и 64 см. По правилу нахождения НОК (65, X), имеем:

$715 = 5\bullet13\bullet11$, $65 = 5\bullet13$. НОК (65, X) = $5\bullet13\bullet11$.

5 и 13 входят в разложение числа 65 и 715. Для нахождения НОК берут разложение первого числа и дописывают те множители, которых не хватает из разложения второго числа X.

Значит, длина шага девочки может быть:

1) X = 11 см, что невозможно (сильно маленький шаг).

2) X = 5•13•11 = 715 (см), что также невозможно (слишком большой шаг).

3) X = 5•11 = 55 (см) – подходит.

4) X = 13•11 = 143 (см) - что также невозможно (слишком большой шаг).

Ответ: 55 см.

**№ 3.12.** Решение. В предыдущей задаче мы выяснили, что на вопрос «Кто вы, рыцарь или лжец?» все отвечают «рыцарь». Значит, и Остап ответил «рыцарь». Получается, что Сидор солгал, поэтому Сидор - лжец. А Прохор сказал, что Остап лжец; значит, он сказал правду, то есть Прохор - рыцарь.

Ответ: Остап и Прохор – рыцари, Сидор – лжец.

**№ 3.13.** Решение. Предположим, что в порту нет ни одного рыцаря, то получается, что все собравшиеся аборигены - лжецы, которые говорят ложь. Но кто-то сказал правду, что все они лжецы! Значит, рыцарь один: в этом случае действительно все лжецы лгут, а единственный рыцарь говорит правду.

Ответ: один рыцарь.

**№ 3.14.** Решение: Если считать ложным первое сообщение, то получим противоречие, так как число, не большее 14, не может делиться на 5 и быть точным квадратом. Если считать ложным второе сообщение, то получим противоречие, так как двузначное число, не большее 14, не может быть точным квадратом. Если считать ложным третье сообщение, то А — двузначное число, которое делится на 5 и является квадратом целого числа. Такое число единственное. Оно равно 25. Если считать ложным четвертое сообщение, то А — двузначное число, не большее 14, которое делится на 5. Но такое число — 10, оно четное, что противоречит пятому сообщению. Если считать ложным пятое сообщение, то получим противоречие, так как двузначное число, не большее 14, не может быть квадратом целого числа.

Ответ: 25

**№ 3.15.** Решение:

$(7\cdot 9 + 12) : 3 – 2 = 23$.

1) $7 \cdot 9 = 63$;   3) $75 : 3 = 25$;

2) $63 + 12 = 75$;   4) $25 – 2 = 23$.

Ответ. $(7\cdot 9 + 12) : 3 – 2 = 23$.

**№ 3.16.** Решение: Для решения этой задачи необходимо воспользоваться следующим известным утверждением: сумма любого числа четных чисел – четная, а нечетного числа нечетных чисел – нечетная. В нашем случае исходная сумма денег (сумма какого-то числа 50-долларовых и 100-долларовых купюр) – четная, а полученная сумма денег (сумма 999 купюр по 1, 5 и 25 долларов) – нечетная.

**№ 3.17.** Решение: Сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39, результат будет меньше 857. Значит в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет: 1 + … + 40 = 820; 857 – 820 = 37.

Ответ : на тридцать седьмое место.

**№ 3.18.** Решение: Так как обычная неделя состоит из семи дней, а неделя на острове – из шести, то совпадение воскресений происходит один раз в 6 х 7 = 42 дня. Значит, за 378 дней происходит 9 совпадений. Поскольку 378 – 365 = 13, то девятое совпадение должно произойти в течение ближайших тринадцати дней (с 15 по 27 декабря). Единственное воскресенье в этот период – 21 декабря. Непосредственным подсчетом получаем, что сегодня на острове – суббота.

Ответ : суббота.

**№ 3.19.** Решение: Рассмотрим, как меняется сумма чисел: было $a+b+c$, стало… вместо них записываются $\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+c}{2}=\frac{2a+2b+2c}{2}=a+b+c$ – не изменилась. Но 101+73+125=299, а 77+79+83=239 – суммы исходной и конечной тройки разные. Поэтому из одной тройки нельзя получить другую.

№ $\mathbf{3.20}$. Решение: $43x + 75y = (\mathbf{3x} + \mathbf{7y}) \cdot 8 + (x + y) \cdot \mathbf{19}$, где каждое слагаемое делится на 19.

**№ 3.21.** Решение:

$3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n= 3^n(3^2+1) - 2^n(2^2+1) = 3^n\cdot 10 – 2^n\cdot 5 = 3^n\cdot 10 – 2^{n-1}\cdot 10 = 10(3^n-2^{n-1})$

Значение выражения $3^n-2^{n-}1$ при любом натуральном n есть натуральное число, значит, значение выражения $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ кратно 10 при любом натуральном значении n.

**№ 3.22.** Решение: При каждом ходе конь меняет цвет поля. Так как начальное и конечное поля одного цвета, то конь сделает четное число ходов. Но это противоречит тому, что надо коню сделать 63 хода, чтобы побывать на каждом поле.

Ответ: не может.

## 4. Задачи на движение.

**№ 4.1.** Данная задача имеет два решения:

1 случай: 1-я точка проделала путь равный двум окружностям, тогда 2-я – путь равный трем окружностям. Обозначим скорость первой точки как х м/с. Так как они продолжали движение одно время, то можно составить уравнение.

$(2\cdot 2\pi r)/x=(3\cdot 2\pi r)/6$ ;

Данное уравнение можно решить с помощью пропорции:

$x\cdot 3\cdot 2\pi r=6\cdot 2\cdot 2\pi r$;

$3x=12$;

$x=4$;

Ответ: 4 м/с.

2 случай: 2-я точка проделала путь равный двум окружностям, тогда 1-я – путь равный одной окружностям. . Обозначим скорость первой точки как х м/с. Можно составить уравнение.

$2\pi r/x=(2\cdot 2\pi r)/6$ ;

Данное уравнение можно решить с помощью пропорции:

$x\cdot 2\cdot 2\pi r=6\cdot 2\pi r$;

$2x=6$;

$x=3$;

Ответ 3 м/с.

**№ 4.2.** Решение:  Пусть x км – расстояние от деревни до железнодорожной, тогда за x/3 турист прошел бы путь со скоростью 3 км/ч, а чтобы прибыть к сроку, ему нужно затратить (x/3-2/3)ч. Турист шёл 1-й час со скоростью 3 км/ч, затем (x-3)/4 со скоростью 4 км/ч и ещё  3/4 ч ожидал на станции отхода поезда, следовательно:

$x/3-2/3=1+(x-3)/4+3/4$ ;

$(x-2)/3=(4-x-3+3)/4$;

$(x-2)/3=(4+x)/4$;

$4x-8=12+3x$;

$x=20$;

Ответ: 20 км/ч

**№ 4.3.** Ответ: Сменить покрышки надо через 9375 км, тогда можно проехать 18750 км.

Решение: Пусть Остап Бендер поменял покрышки местами через x километров. Тогда задние покрышки отработали [x/ 15000] своего ресурса, а передние [x/ 25000]. После замены они смогут проработать еще 25000(1-[x/ 15000]) и 15000(1-[x/ 25000]) километров соответственно. Таким образом, всего можно проехать не более x+ 25000(1-[x/ 15000]) = 25000 -2/3x и не более x+15000(1-[x/ 25000]) = 15000 + 2/5x . Максимальное расстояние можно, если эти выражения равны (иначе либо первые, либо вторые покрышки выйдут из строя раньше, ведь когда первое выражение растет, то второе уменьшается и наоборот). Таким образом, 25000 - 2/3x = 15000 + 2/5x , откуда 10000 = [16/ 15]x , или x = 9375.

**№ 4.4.** Ответ: 37, 5 км/ч.

**№ 4.5.** Ответ.  7,5 м.

**№ 4.6.** Решение: 13131 -  число, следующее за числом 12921, которое одинаково читается в обоих направлениях. Тогда скорость автомобиля будет равна (13131 – 12921) : 2 = 105 км/ч.

**№ 4.7.** Решение:  Пусть v(м/час) – скорость машин до знака, u (м/час) – скорость машин после знака. Вторая машина проедет знак позже первой на 10/v(час). За это время первая машина проедет 10u/v(метров) = (10 · 6) : 8 =7.5 метров. Этот интервал и будет сохраняться после знака.

Ответ.  7,5 м.

**№ 4.8.** Решение: Расстояние между селами не может быть больше, чем 49 километров, так как тогда на одном из столбов будет написано с одной стороны 49, а с другой – не 0, то есть, сумма цифр будет больше 13. На первых девяти столбах с одной стороны записаны однозначные числа от 1 до 9, поэтому числа, записанные с другой стороны, также должны быть из одного десятка (чтобы суммы цифр были одинаковы). Следовательно, искомое расстояние выражается числом, оканчивающимся на 9. Числа 9, 19, 29 и 39 решениями не являются, так как на первом столбе сумма цифр не будет равна 13. Таким образом, искомое расстояние равно 49 километрам.

Ответ : 49 километров.

**№ 4.9.** Решение: Пусть s – расстояние между наблюдателями, x – скорость автобуса, t – промежуток времени, через которое мимо первого наблюдателя последовательно проехали автобус, мотоцикл и автомобиль. Тогда время, затраченное автобусом, мотоциклом и автомобилем на путь от одного наблюдателя до другого, равно s/x, s/30, s/60 соответственно, а из условия задачи выводим равенства: s/30 =s/x + t, s/60 = s/x – t. Сумма левых частей этих равенств равна сумме их правых частей. Имеем s/30 + s/60 = 2s/x, откуда x = 40.

Ответ: 40 км/ч.

**№ 4.10.** Решение: Вернувшись домой и потом придя в школу с опозданием, Петя в результате затратит на весь путь 38 минут, т.е. на 18 минут больше обычного. Эти 18 минут затрачены на возвращение домой и обратно до точки, откуда он вернулся, т.е. на этот участок в одном направлении Пети необходимо 9 минут. Так как весь путь требует 20 минут, то до возвращения домой Петя прошел $\frac{9}{20}$ всего пути до школы.

Ответ: $\frac{9}{20}$ пути.

**№ 4.11.** Решение: За 10 секунд, которые Петя проехал, после того как заметил Васю в некотором месте А, трамвай увёз Петю от А на расстояние, которое он способен пройти за 50 секунд. За те же 10 секунд Вася ушёл от А в противоположном направлении на расстояние, проходимое Петей за 5 секунд. Таким образом, Петя, выпрыгнув из вагона трамвая, будет находиться позади Васи на расстоянии, которое он (Петя) способен пройти за 55 секунд. За каждую секунду Петя будет уменьшать расстояние, отделяющее от Васи, на путь, который он сам проходит за полсекунды (т.к. за эту секунду Вася пройдёт вдвое меньший путь, чем Петя, т.е. путь, который Петя проходит за полсекунды). Значит, Петя догонит Васю через:

$$55 : \frac{1}{2} = 110 \text{ секунд} = 1\text{мин}. 50 \text{ сек}.$$

Ответ: 110 секунд.

**№ 4.12.** Решение: Обозначим за S (м) длину поезда, а за v (м/с) - скорость поезда. Используя первую часть предложения задачи, получим первое уравнение $\frac{S}{v} = 5$ . Так как с момента вхождения поезда на платформу до момента ухода с неё, «хвост» поезда проходит расстояние S+150 (м), то второе уравнение будет $\frac{S+150}{v} = 15$ или $\frac{S}{v} + \frac{150}{v} = 15$. Получаем $\frac{150}{v} = 10$, $v = 15$ м/с, следовательно S= 75 м.

Ответ: 75 м и 15 м/с.

**№ 4.13.** Решение: Если уменьшить интервал в 12 мин между автобусами на $\frac{1}{5}$ , то интервал движения станет равным 12- 12×$\frac{1}{5}$ =12 × $\frac{4}{5}$ = $\frac{48}{5}$ (мин)

Пусть изначально по маршруту курсировало n автобусов с интервалом 12 мин, т.е. длина маршрута равна 12 n. Для того чтобы найти количество автобусов после уменьшения интервала движения, т.е. 12 n÷$\frac{48}{5}$=12 n×$\frac{5}{48}$=$\frac{5n}{4}$=n+$\frac{n}{4}$.

Таким образом. Количество автобусов необходимо увеличить на четверть при условии. Что количество автобусов на маршруте делится на 4.

Ответ: $\frac{n}{4}$ автобусов, где n-количество автобусов, n делится на 4.

**№ 4.14.** Решение: Пусть за четыре дня путешественник прошел $x$ км. Тогда в первый день он прошел $\frac{x}{100}\times 20+2=\frac{x}{5}+2$(км), во второй- $\frac{x-(\frac{x}{5}+2)}{100}\times 50+1=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$(км), в третий-

$\frac{x-\left(\frac{x}{5}+2\right)-\frac{2x}{5}}{100}\times 25+3=\frac{\frac{2x}{5}+10}{4}=\frac{x+25}{10}$(км), в четвертый-18 км.

Составим и решим уравнение:

$\frac{x}{5}+2+\frac{2x}{5}+\frac{x+25}{10}+18=x$, $7x+225=10x$, $3x=225$, $x=75$.Значит за четыре дня путешественник прошел 75 км.

Ответ: 75 км.

**№ 4.15.** Решение: Первая муха, конечно, приползёт раньше. Пока вторая муха доберётся до верха, первая успеет сползать туда и обратно (так как её скорость в это время в два раза больше).

**№ 4.16.** Решение: Пусть x км/ч - скорость автомобиля по ровному участку, тогда при движении от A к B скорость равна x−5, время движения равно 100x−5 ч. При движении от B к A скорость равна x+15, время движения равно 100x+15 ч. Так как расстояние от A до B и обратно автомобиль проехал за 1 ч 50 мин, что равно 116 ч, то приходим к уравнению 100x−5+100x+15=116,
откуда 11x2−1090x−6825=0 и x=105 (второй корень отрицателен).
Ответ: 105 км/ч

**№ 4.17.** Решение: Обратим внимание, что необходимо привести размерности величин к одному виду, например, к минутам. Пусть S - длина окружности, v1, v2 - скорости тел.
Тогда Sv1−v2=112 и Sv1+v2=16. Так как за 12 с = 1/5 мин тела сблизились на 40 - 26 = 14 м,
то v15+v25=14, откуда v1+v2=70. Из первых двух уравнений получаем, что S=112(v1−v2)=16(v1+v2), откуда v2=3v14. Далее легко находятся все неизвестные величины.
Ответ: 1120 м; 40 м/мин, 30 м/мин.

**№ 4.18.** Решение: Валентин пробегает 50*60=3000 см за 100 с, то есть его скорость 30 см/с, что составляет 18 м/мин.

**№ 4.19.** Решение: 6 км/ч. Туристы сэкономили 20 минут, за это время автобус дважды проехал бы путь, который они прошли, а шли они 100 минут.

## 5. Задачи на проценты.

**№ 5.1.** Решение: 0,2 + 0,3 = 0,5

0,2 : 0,5 = 0,4 = 40%

(0,3 – 0,2) : 0,3 = 1/3=33 1/3%

(0,3 – 0,2) : 0,2 = 0,5 = 50%

Ответ: 40%, на 33 1/3%, на 50%.

**№ 5.2.** Решение: 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на 2 года. 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет, значит, 100% возраста брата больше 75% возраста сестры на 14 лет, отсюда 37,5% возраста брата составляют 12 лет.

12 : 0,375 = 32 (года) брату;

32 – 14 = 18 (лет) составляют 75% возраста сестры;

18 : 0,75 = 24 (года) сестре.

Ответ: брату 32 года, сестре 24 года.

**№ 5.3.** Решение: Первая мастерская, чтобы перевыполнить свой план на 120%, сделала 6/5 своего плана, а вторая, чтобы перевыполнить его на 125%, - 5/4 своего. Значит, план первой мастерской должен делиться на 5, план второй - на 4, а сумма запланированных моторов равна 18. Перебором найдем, что первая мастерская должна была отремонтировать 10 моторов, а вторая – 8. А отремонтировала первая – 12 моторов, а вторая – 10.

Ответ: 12 и 10 моторов.

**№ 5.4.** Решение: Примем бывшую цену билета за 1, тогда повышенная цена 1,4. Пусть «дешевый» спектакль посетило $m$ человек, а «дорогой» – $n$ человек. Тогда выручка театра за «дешевый» спектакль составит $m$, а за «дорогой» – $1{,}4 \cdot n$. Согласно условию, $1{,}4 \cdot n : m = 0{,}84$. Значит, $n : m = 0{,}84 : 1{,}4 = 0{,}6$. Следовательно, если принять $m$ за 100%, то $n$ составит 60% от $m$, т.е. число зрителей театра уменьшилось на 40%.

Ответ: на 40%.

**№ 5.5.** Решение: Пусть в автобусе было **х** пассажиров, $x \leq 100$ и х – натуральное число. Тогда 4 % от х $\frac{x \cdot 4}{100} = \frac{x}{25}$ - натуральное число, т. е. х делится на 25. По условию число сидящих пассажиров в 2 раза больше числа стоящих, значит, общее количество пассажиров должно делиться на 3.

Итак, среди первых ста натуральных чисел надо выбрать число, которое делится одновременно и на 3, и на 25. Это число 75. В автобусе было 75 пассажиров, а 4 % от них, т.е. 3 пассажира, вышли на остановке, а в автобусе остались 72 пассажира.

Ответ: 72 пассажира.

**№ 5.6.** Решение: Пусть торговец планировал продать книгу за а рублей, тогда он продал её за 0,95а рублей. Эта сумма составила 100%+14%=114% цены, по которой торговец сам купил книгу и которая составляла 0,95а: 1,14 = $\frac{5}{6}$а (руб.).Подсчитаем доход, который планировал получить торговец (в процентах): а:($\frac{5}{6}$ а)·100% = 120%. Торговец планировал получить 120%-100% = 20% дохода.

Ответ: 20%.

**№ 5.7.** Решение: 1) 200 • 0,09= 18 (г) – уксусной кислоты в растворе в растворе массой 200 г.

2)300 • 0,12= 36 (г) – уксусной кислоты в растворе массой 300 г.

3)18 +36=54 (г)- масса нового раствора.

4) 200 +300 =500 (г) – масса первоначального раствора.

5) 54: 500= 0,108 = 10,8 % - составляет концентрация нового раствора.

Ответ: 10,8 %.

**№ 5.8.** Решение: По условию задачи имеем *а*=0,8*в*, *с*=1,4*в*, *с*-*а*=72.
*с*-*а*=1,4*в*-0,8*в*=0,6*в*
0,6*в*=72
*в*=72/0,6
*в*=120

Найдем число $a$
$a$=0,8$в$
$a$=0,8*120
$a$=96
Найдем число $c$
$c$=1,4$в$
$c$=1,4*72
$c$=168
Ответ: $a$=96, $в$=120, $c$=168.

**№ 5.9.** Решение: По условию в 100кг грибов содержится 1 кг сухого вещества (100-0,99*100=1). Масса сухого вещества в общей массе грибов постоянна (1кг) и стала после подсушивания составлять 2%: (100-98=2), следовательно масса грибов после подсушивания стала равной 50кг (т. к. 2% - 1кг, то 100% - 50кг).
Ответ: 50кг.

**№ 5.10.** Решение: Составим схему –

У ? Р

85% 75%

В кружке под буквой «У» обозначим жителей, говорящих по-узбекски, под буквой «Р» — по-русски. В общей части кружков обозначим жителей, говорящих на обоих языках. Теперь от всех жителей (100%) отнимем кружок «У» (85%), получим жителей, говорящих только по-русски (15%). А теперь от всех, говорящих по-русски (75%), отнимем эти 15%. Получим говорящих на обоих языках (60%).

**№ 5.11.** Решение: Покажем, что у 40% драконов может быть 60% голов. Пусть в этом царстве живет 100 драконов: 40 драконов с одной головой, 20 – с двумя головами и 40 – с тремя. Тогда число голов у всех драконов равно 40 • 1 + 20 • 2 + 40 • 3 = 200. При этом все 40 трехглавых драконов, что составляет 40% от общего числа драконов, имеют 40 • 3 = 120 голов, что составляет 120/200 • 100% = 60% от общего числа голов.

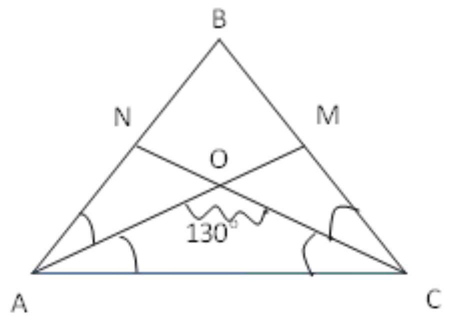
**№ 5.12.** Решение: Пусть у Васи в бутылке было a мл «Фанты», тогда у Пети было 1,1a мл. После того, как каждый мальчик отпил из своей бутылки, у Васи осталось 0,98a мл, а у Пети – 0,89·1,1a = 0,979a мл.
Ответ: У Васи.

**№ 5.13.** Решение: Поскольку число школьников, получивших ту или иную оценку, всегда целое, то для решения задачи нам надо найти целое число, меньшее 50, одновременно делящееся на 7, 3, 2. Единственным возможным ответом является число 42. Это значит, что всего в классе 42 ученика; 6 из них получили пятёрки; 14 — четвёрки; 21 — тройки. Следовательно, двойку получил 1 ученик.

**№ 5.14.** Решение: Пусть Таня съела x печений. Тогда Ваня съел 5x печений, из которых 5x-x=4x печений он съел до прихода Тани. Так как всего печений было 5x+x=6x , до Таниного прихода Ваня съел = всего печенья.

## 6. Геометрические олимпиадные задачи.

**№ 6.1.** Решение:




1 случай: проводим биссектрисы углов при основании AC.

Дано:

∆ ABC – равнобедренный, AB = BC,

AM, CN – биссектрисы углов A и C,

∠ AOC = 130°

Найти: ∠ A, ∠ B, ∠ C = ?

Решение:

1) Рассмотрим треугольник AOC;

2) Так как ∠ A = ∠ C, то половины углов тоже равны, значит ∠ OAC = ∠ OCA;

3) По теореме о сумме углов, ∠ OAC = ∠ OCA = (180° - 130°) : 2 = 25°;

4) Углы A и C в два раза больше углов ∠ OAC и ∠ OCA, следовательно они равны 25° · 2 = 50°;

5) Тогда ∠ B = 180° - 50° - 50° = 80°.

2 случай:

Проводим биссектрисы углов при боковой стороне.

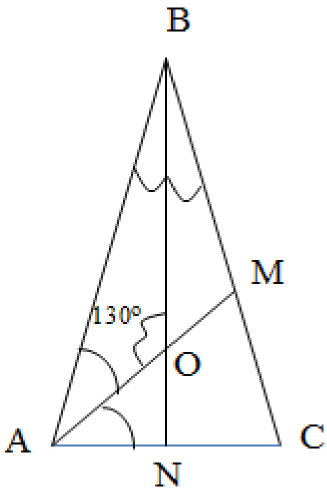
Дано:

∆ ABC – равнобедренный, AB = BC,

AM, BN – биссектрисы,

∠ AOB = 130°

Найти: ∠ A, ∠ B, ∠ C = ?




Решение:

1) Найдем ∠ AON, так как он является смежным ∠ AOB, то ∠ AON = 180° - 130° = 50°;

2) Так как Δ ABC – равнобедренный, то биссектриса BN является высотой. Поэтому ∠ BNA = ∠ BNC = 90°;

3) Рассмотрим Δ AON;

4) По теореме о сумме углов треугольника

∠ OAN = 180° - 50° - 90° = 40°;

5) Так как угол А в 2 раза больше ∠ OAN, то ∠ A = 80°;

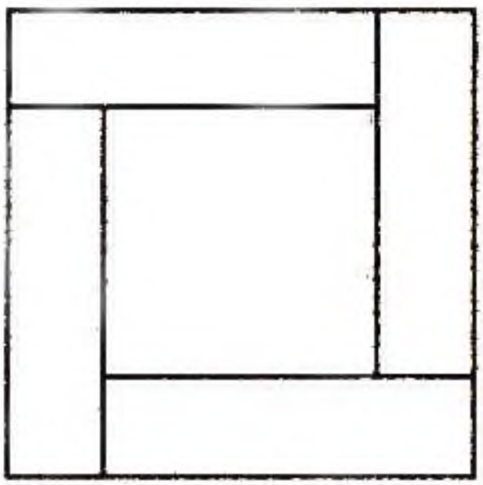
6) Так как треугольник равнобедренный, то ∠ A = ∠ C = 80°;

7) По теореме о сумме углов треугольника ∠ B = 180° - 80° - 80° = 20°.

Ответы: 1) ∠ A = ∠ C = 50°, ∠ B = 80°;

2) ∠ A = ∠ C = 80°, ∠ B = 20°.

**№ 6.2.** Решение:



**№ 6.3.** Решение: Сделать точку М центром параллелограмма.

**№ 6.4.** Решение :

По теореме о внешнем угле треугольника сумма углов CKA и KCA равна углу CAB.

Поскольку треугольник CAK – равнобедренный, KCA = CKA = CAB / 2. Аналогично, BCM = BMC = CBA / 2.

Таким образом, KCM = KCA + ACB + BCM = ACB + ( CAB + CBA) / 2 = 90 + 45 = 135.

**№ 6.5.** Решение: В 12.00 стрелки сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит 1/3 окружности, то есть описывает угол в 120º. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в 120º : 12=10º и будет образовывать с минутной стрелкой угол в 120º -10º=110º.

**№ 6.6.** Решение: 6 квадратов вырезать не удастся, т.к. даже самые маленькие 6 квадратов занимают площадь 1+4+9+16+25+36=91, что превосходит площадь прямоугольника. (Другое рассуждение, приводящее к тому же выводу без привлечения площадей, основано на следующем: если мы поместим два квадрата со стороной 6 и 5, то они примыкают друг к другу, и тогда для квадрата со стороной 4 не хватит места, т.к. 5+4>8).

5 квадратов со сторонами от 1 до 5 разместить очень просто (например, поместим квадрат со стороной 5 в угол прямоугольника и приставим к одной его «свободной» стороне квадрат со стороной 4, а к другой – квадраты со сторонами 3 и 2).

Ответ. 5 квадратов.

**№ 6.7.** Решение.

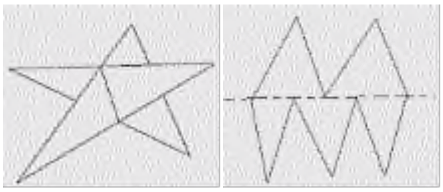
а) Сосчитав сумму длин 1+2+…+9=45, разобьём палочки на три группы с суммой длин 15 в каждой. Это можно сделать, например, так: 9+6=8+7=6+5+4+3+2+1. Палочки каждой группы приставим друг к другу, сложив тем самым соответствующую сторону треугольника.

б) Сумма 10 палочек равна 55, она не делится на 3, и поэтому сложить треугольник нельзя.

Ответ. а) Можно, б) нельзя.

**№ 6.8.** Ответ : существует.

Смотри рисунки :



**№ 6.9.** Решение: На отрезке BM отметим точку N так, что угол BDN равен 600 (рис.1).

Тогда в треугольнике BDN угол B равен 600 как угол, вертикальный с углом равностороннего треугольника ABC. Угол BND равен 600 (по сумме углов треугольника). Значит, BD = DN = BN. Имеем: MN = BM – BN = CD – BD = BC = AB. Треугольник ADB равен треугольнику MDN по двум сторонам и углу между ними: AB = NM, BD = DN, угол ABD равен углу MND как внешние углы равносторонних треугольников. Следовательно, AD = DM.

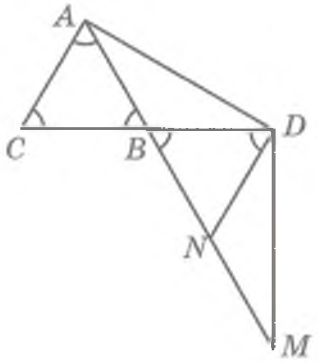



Рис. 1

**№ 6.10.** Решение: Пусть А – вершина равнобедренного треугольника АВС, а его биссектриса АМ вдвое меньше биссектрисы ВД. На продолжении биссектрисы АМ за точку М отложим отрезок МК, равный АМ. Тогда АК = 2АМ = ВД. Если Р – точка пересечения биссектрис треугольника АВС, то ВР = КР (надо доказать). Обозначим ∠АВР через $\alpha$. Тогда ∠РКВ = ∠РВК = $3\alpha$. Поскольку ВК = АВ, то ∠ВАК = ∠АКВ = ∠РКВ = $3\alpha$. Из прямоугольного треугольника АМВ находим, что ∠ВАК=∠ВАМ=90° – ∠АВМ = $90° - 2\alpha$. Из уравнения $3\alpha$ = $90° - 2\alpha$ находим, что $\alpha$ = 18°. Следовательно, ∠АВС = 36°.Тогда ∠ВСА = 36°, ∠ВАС = 108°.

Ответ: 36°, 36°, 108°.

**№ 6.11.** Решение: Угол САВ является внешним углом треугольника СКА, поэтому он равен сумме углов КСА и СКА. Так как по условию АК=АС, то треугольник САК является равнобедренным, а значит

$$< \text{KCA} =< \text{CKA} = \frac{1}{2} < \text{CAB}.$$

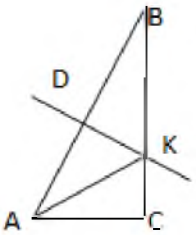
Аналогично, рассуждая про треугольник ВСМ, получим, что

$$< \text{BCM} =< \text{BMC} = \frac{1}{2} < \text{CBA}.$$

Таким образом, $< \text{KCM} =< \text{KCA} +< \text{ACB} +< \text{BCM} = < \text{ACB} + \frac{1}{2}(< \text{CAB} +< \text{CBA}) = 90^0 + 45^0 = 135^0$.

Ответ: $135^0$

**№ 6.12.** Решение: Пусть в прямоугольном треугольнике угол В равен $30^0$, AD=BD, DK ⊥AB(см. рис).Выполним дополнительное построение, соединив точки А и К. Прямоугольные треугольники BDK




и ADK

будут равны по двум катетам, значит $< DAK =< DBK = 30^0$.

Тогда угол КАС равен $30^0$. Следовательно треугольники ADK и ACK будут равны по гипотенузе и острому углу. Используя свойство острого угла в треугольнике имеем

$$CK = DK = \frac{1}{2} BK,$$

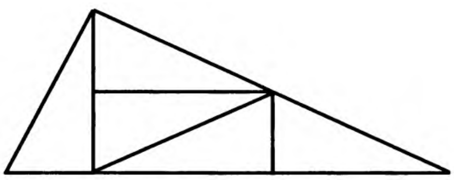
откуда $DK = \frac{1}{3}BC.$

**№ 6.13.** Решение: Угловая плитка учитывается один раз, поэтому между боковыми плитками находится (56-4) :4=13. В следующем ряду между боковыми плитками находится 11 и тогда количество плиток будет (11×4)+4=48, в следующем ряду (9×4)+4=40, и т.д. Количество плиток : 56+48+40+32+24+16+8+1=195.

**№ 6.14.** Решение: Ясно, что задача сводится к построению угла в 1°, далее все просто. Заметим, что 19 x 19 = 361, то есть сумма девятнадцати углов в 19° есть окружность плюс 1°. Сложение углов при помощи циркуля и линейки является стандартной, хорошо решаемой задачей. Получив угол в 1°, далее отложим этот угол девятнадцать раз и получим угол в 19°. Задача решена.

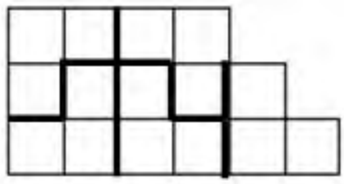
**№ 6.15.** Решение: Очевидно, что треугольник можно разделить на 4 равные части. Далее к этому треугольнику требуется «приставить» его четвертую часть; при этом снова должен получиться треугольник. Это возможно только в том случае, когда треугольник является прямоугольным, ведь только тогда сумма двух прямых углов даст развернутый угол (отрезок, который является стороной треугольника, при этом будет суммой сторон большого треугольника и его «четвертушки»).

Покажем на рисунке решение задачи. Необходимо нарисовать прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза длиннее другого.



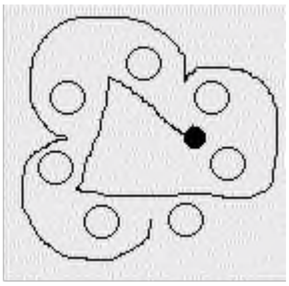
## 7. Разрезания. Замощения.

**№ 7.1.** Решение: Найдем количество клеточек, разделим на 5. Получим количество клеточек из которых состоит каждая такая фигура – 3 клетки. Форма – буквой Г.



**№ 7.2.** Решение: Разрежем поле для игры на 16 квадратов размером 2 2. Заметим, что в каждом таком квадрате не может стоять более одного корабля (иначе корабли будут соприкасаться). Так как всего кораблей 16, то в каждом квадрате должен стоять корабль. Таким образом, Васе достаточно полностью «расстрелять» один из этих квадратов.

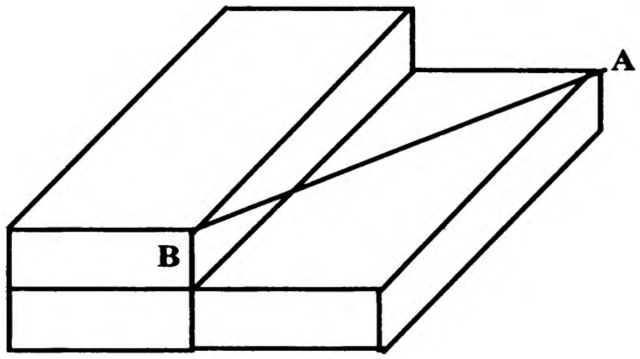
**№ 7.3.** Решение:



На рисунке показано, каким образом любой козел (черный) сможет допрыгать до любого места, то есть, встать за любым (белым), заранее выбранным. В это время остальные козлы стоят на своих местах. Поэтому, сначала второй по росту козел встанет за самым высоким, после чего за ним встанет следующий по росту, и так далее.

Такая операция возможна потому, что числа 2 и 7 – взаимно простые.

**№ 7.4.** Решение. Решение задачи представлено на рисунке.
Необходимо сложить три кирпича и измерить расстояние между точками А и В. Это диагональ несуществующего кирпича.




**№ 7.5.** Решение: Вырезаны поля одного цвета, пусть для определенности черного. Поэтому остается 32 белых и 30 черных клеток. Так как кость домино всегда накрывает одну белую и одну черную клетку, то костями домино нельзя замостить шахматную доску $8^x8$ клеток, из которой вырезаны два противоположных угловых поля.

**№ 7.6.** Решение: Предположим, что доска $10^x10$ клеток разбита на такие фигурки. Каждая фигурка содержит либо 1, либо 3 черные клетки, т.е. всегда нечетное число. Самих фигурок должно быть 100/4=25 штук. Поэтому они содержат нечетное число черных клеток, а всего черных клеток 100/2=50 штук. Получено противоречие.

## 8. Разные задачи

**№ 8.1.** Решение: Обозначим меньшее из 12 чисел за x. Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 9) = (x + 10) + (x + 11)$, $10x + 45 = 2x + 21$, $x = -3$. Значит, нужные числа: -3, -2, -1, ... , 7, 8.

**№ 8.2.** Решение: Тонкая свеча за час становится короче на 6 см, через x часов ее длина станет (24 — 6x) см. Толстая свеча за час сгорает на 4 см, через x часов ее длина будет равна (24 - 4x) см. Получаем уравнение $24 - 4x = 2(24 - 6x)$, $8x = 24$, $x = 3$. Ответ: через 3 часа.

**№ 8.3.** Решение: В каждый рейс можно загрузить не менее 2 т. Поэтому потребуется не более 5 рейсов. 4 рейсов может оказаться недостаточно. Например, если 13 одинаковых ящиков распределить по 4-м рейсам, то хотя бы в одном рейсе будет 4 ящика массой $4 \times 10/13 > 3$ т.

Ответ: 5 рейсов

**№ 8.4.** Ответ: $3025 = 55^2$.

**№ 8.5.** Решение : Если у туриста было X рублей, то в банке ОГОГО он получит за них (X – 7000) / 3000 тугриков, а в банке ЙОХОХО X / 3020 – 1 тугриков. Решая уравнение ( x – 7000 ) / 3000 = X / 3020 – 1, получаем X = 604000 (руб.).

**№ 8.6.** Решение : Данный график образует с осью абсцисс такой же угол в 45,как и биссектриса первого и третьего координатных углов. Значит, ее угловой коэффициент равен 1.

Поскольку при х = 0 значение функции равно 3, то искомая функция есть у = х + 3.

**№ 8.7.** Ответ: 4017 и -1.

**№ 8.8.** Решение: Нет, не может. Для того, чтобы средняя скорость гонца, пробежавшего 24 мили, была равна 12 милям в час, необходимо, чтобы он пробежал этот путь за 2 часа. Но из условия следует, что за два часа гонец пробежал только 16 миль.

**№ 8.9.** Ответ: 4.

**№ 8.10.** Решение: Всего денег у купцов (90 + 85 + 80 + 75) : 3 = 110 рублей. Поэтому у первого 110 – 90 = 20, у второго 110 – 85 = 25, у третьего 110 – 80 = 30, а четвертого 110 – 75 = 35 рублей.

**№ 8.11.** Решение: Вычислим несколько первых членов данной последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8;11;5; 8; 11; 5; … Таким образом, начиная с пятого члена последовательности, будет повторяться одна и та же тройка чисел 5, 8, 11. Так как 2008 – 4 = 2004, а 2004 кратно 3, то на 2008-м месте будет стоять число 11.

## 9. Принцип Дирихле.

**№ 9.1.** Решение: Можно. Решается методом от противного или используя принцип Дирихле.

**№ 9.2.** Решение: Предположим противное, то есть, предположим, что в этом лесу не существуют две ели с одинаковым числом иголок. Тогда существует не более одной ели (одна ель или ни одной), имеющей одну иголку. Аналогичным образом, существует не более одной ели с двумя иголками и т.д., не более одной ели с 499999 иголками, не более одной ели с 500000 иголками. Таким образом, не более 500000 елей обладают числом иголок от 1 до 500000. Поскольку всего растут 800000 елей, и каждая ель имеет не долее 500000 иголок, следует, что найдутся хотя бы две ели с одинаковым числом иголок.

Замечание. Легко заметить, что решение в сути не зависит от конкретных чисел 800000 (количество елей) и 500000 (наибольшее число иголок). Принципиально был использован тот факт, что число 800000 строго больше 500000. В доказательстве предполагалось, что нет ни одной ели без иголок, хотя задача и доказательство справедливы и в этом случае.

**№ 9.3.** Решение: Пусть "коробками" будут месяцы, а "предметами" - ученики. Распределяем, "предметы" по "коробкам" в зависимости от месяца рождения. Так как число месяцев, то есть, коробок, равно 12, а число учеников, то есть, предметов 40 = 12•3+4, согласно принципу Дирихле существует коробка (месяц) с по крайней мере 3+1=4 предметами (учениками).

**№ 9.4.** Решение: Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 0,2 м. Докажем. Что в каком-то из них находится, по крайней мере, 3 из данных точек. Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не больше 2 точек, то всего их было бы не больше 50 (2∗25=50), а по условию задачи их 51 точка, значит, по крайней мере, три из них попадут в квадратик со стороной 0,2 м.

**№ 9.5.** Решение: 25 ящиков распределим по трем сортам. Так как 25 = 3 х 8 + 1, то применим «обобщенный принцип Дирихле» для N= 3, к = 8 и получим, что какого-то сорта не менее 9 ящиков.

**№ 9.6.** Решение: Пусть $A$ - один из участников. Он может общаться с каждым из 16 участников на не более одном из трех известных ему языков. Тогда существует язык, на который $A$ говорит с не менее чем шестью участниками. Пусть $B$ - любой из них. Ясно, что среди остальных 5 участников есть 3, с которыми $B$ может общаться на одном языке (назовем его "второй язык"). Если среди этих троих участников хотя бы два, скажем $C$ и $D$, могут говорить на "втором языке", то $B$, $C$ и $D$ и есть те три человека, говорящие на одном языке.

**№ 9.7.** Решение: Перед нами миллион «кроликов»-елок и, увы, всего лишь 600001 клетка с номерами от 0 до 600000. Каждый «кролик»-елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кролика» – если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов»-елок было бы не более 600001 штук. Но ведь, если два «кролика»-елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

**№ 9.8.** Решение: Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых.