ГРАФЫ

Пример 1. В одном городе шесть станций метро: Алмазная, Золотая, Лесная, Парковая, Садовая, Серебряная. Поезда следуют по маршрутам Алмазная—Золотая, Золотая—Серебряная, Лесная—Садовая, Садовая—Парковая, Парковая—Лесная, Серебряная—Алмазная. Можно ли с помощью этих поездов добраться от станции Парковая до станции Алмазная?

Решение. Нарисуем картинку (рис.1), на которой будем отмечать станции точками, а соединяющие их маршруты — непересекающимися линиями. Теперь видно, что добраться от станции Парковая до станции Алмазная нельзя.

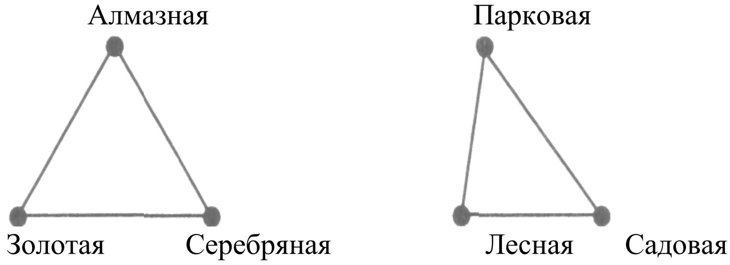

Рис. 1

Такие картинки — наборы точек, некоторые из которых соединены линиями, — называются *графами.* Точки при этом называют *вершинами графа,* а линия — его *ребрами.* Мы будем считать, что две вершины в графе могут быть соединены не более чем одним ребром.

Очень часто построение графа помогает при решении задач. Очень часто применение графов делает наглядной общую идею задач.

Пример 2. В классе 24 человека. Может ли быть так, что 8 из них имеют по три друга в классе, 11 — по пять друзей, а 5 человек по четыре друга?

Пример 3. В государстве 24 города. Может ли быть так, что 8 из них соединены с тремя городами, 11 — с пятью городами, а 5 — с четырьмя городами?

Решение. И в той, и в другой задаче речь идет о том, можно ли построить граф, имеющий 24 вершины, причем 8 из них соединены ребрами с тремя вершинами, 11 — с пятью вершинами и 5 — с четырьмя вершинами. Сосчитаем, сколько ребер должно быть у такого графа. Для этого найдем сумму: $8 \cdot 3 + 11 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 24 + 55 + 20 = 99$ (по три ребра выходит из каждой вершины первого сорта, по пять из каждой вершины второго сорта и по четыре — из каждой вершины третьего сорта). Очевидно", что мы считали каждое ребро дважды — ведь оно соединяет две вершины. Поэтому ребер должно быть $99 : 2 = 49{,}5$. Но число ребер не может быть не целым. Получено противоречие. Такой граф построить невозможно.

Дадим важное определение: *число ребер, выходящих из вершины, называется ее степенью.*

В рассмотренных примерах речь шла о построении графа, имеющего 8 вершин степени 3, 11 вершин степени 5 и 5 вершин степени 4.

Еще не зная слово «граф», вы, возможно, встречали задачи, в которых спрашивалось, можно ли нарисовать ту или иную картинку, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждую линию ровно один раз. Такие задачи впервые были исследованы Леонардом Эйлером и типичны для теории графов.

Пример 4. Можно ли нарисовать граф, изображенный на рисунке 2, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

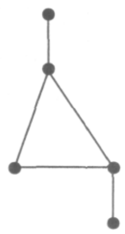

Рис.2

Решение. Сделать это нельзя. В самом деле, рисуя граф так, как требуется в условии, мы в каждую вершину, кроме двух — начальной и конечной — должны войти столько же раз, сколько выйти, поэтому степени всех вершин, кроме двух, должны быть четными, а это не так.

1. Нарисуйте граф:

а) имеющий три вершины и два ребра;

б) четыре вершины и четыре ребра;

в) четыре вершины и шесть ребер.

2. В графе n вершин и любые две из них соединены одним ребром. Сколько ребер в этом графе?

3. Встретились три мушкетера и четыре гвардейца. И мушкетеры, и гвардейцы любят только тех, кто служит в их части. Изобразите эту систему отношений с помощью графа.

4. Женя пытался представить родственные отношения в своей семье в виде графа. Вершинами он отмечал некоторых членов семьи, а ребрами соединял тех, кто является отцом и сыном. Результаты его изысканий представлены на рисунке 3. Не допустил ли Женя ошибки?

Рис. 3

5. Пять мальчиков Андрей, Борис, Василий, Григорий и Дмитрий разъехались на каникулы. Стали переписываться: Андрей и Дмитрий, Василий и Григорий, Григорий и Борис. Постройте граф, показывающий, кто с кем поддерживает переписку. Может ли сообщение о жизни Бориса дойти до Василия? до Андрея?

6. На рисунках 4, *а—д* изображены графы. Для каждого из этих графиков определите степени его вершин.

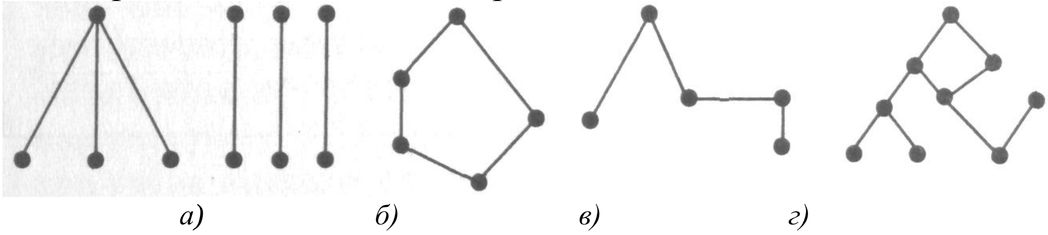

Рис. 4

7. Постройте графы, в которых степень всех вершин: а) 1; б)2;в)3.

8. Можете ли вы построить граф, у которого: а) одна вершина степени 3 и три степени 1; б) одна вершина степени 2 и три степени 1; в) пять вершин степени 7 и две вершины степени 6; г) три вершины степени 5, пять вершин степени 7 и семь вершин степени 3?

9. В стране живут 20 рыцарей. Может ли быть так, что у троих из них по 7 врагов, у одиннадцати — по 2 врага, а у шести — по 5 врагов?

10. Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

11. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

12. Можете ли вы построить граф, в котором будут только вершины степени 3 и 5, а число ребер будет равно 7?

13. В графе n вершин ($n > 1$). а) Какие степени могут быть у вершин графа? б) Могут ли быть у графа одновременно вершина степени n - 1 и вершина степени 0? в) Докажите, что в графе обязательно есть две вершины с одинаковыми степенями.

14. В высшей футбольной лиге участвуют 16 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой остальной ровно один раз. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

15.Какие из приведенных на рисунке 5 графов можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

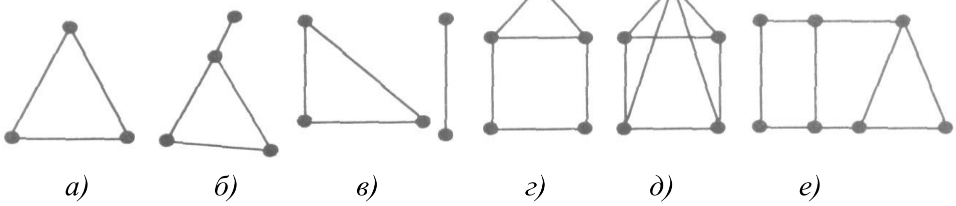

Рис.5

16. В городе пять островов (рис. 6), некоторые из которых соединены мостами. Можно ли обойти все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Решите такую же задачу для другого города, схема которого изображена на рисунке 7. (Задача такого типа про город Кенигсберг впервые была решена Леонардом Эйлером.)

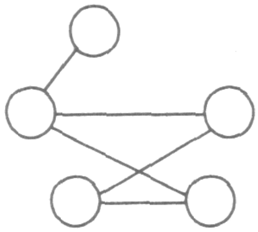

Рис.6

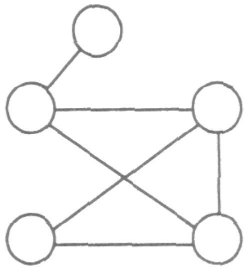

Рис.7