ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

Как вы знаете, если два целых числа *а* и *Ъ* имеют общий делитель d (пишут: *a*⋮*d*,*b*⋮*d*), то он будет делителем и чисел *а* + *Ь*, *а* - *b*, *ka*, *mb*, *ka* + *mb* (*k* и *т* — целые числа)*.

Пример 1. Докажите, что если *2а* + *в* ⋮ 4, то 14*а* – 21*в* ⋮ 4 (*а* и *в* — целые числа).

Решение. Заметим, что 14а – 21в = 7(2а – 3в) = 7(2а + в – 4в).

Но так как 2а + в ⋮ 4, то 2а – 3в ⋮ 4 (4в ⋮ 4), а тем самым и 7(2а - в) ⋮ 4.

Заметим, что совсем легко получить и более сильное утверждение: 14а - 216 • 28. В самом деле, 2а - 36 • 4, но числа 7 и 4 не имеют о.бщих делителей, кроме единицы (взаимно просты), поэтому произведение 7(2а - 36) • 28.

Если а ⋮*d* и а ⋮*с*, причем с и *d* — взаимно просты, то *а* ⋮*cd*.

Часто при решении задач на делимость чисел приходится перебирать их *остатки* от деления на какие-то другие числа. Например, остаток числа 17 от деления на 6 — число 5, а остаток числа 28 от деления на 6 — число 4. Вообще, остаток от деления на 6 может быть равен лишь 0, 1, 2, 3, 4, 5. От деления, скажем, на 57 может быть лишь 57 остатков (0,1, 2, 3, ..., 55, 56). Их конечное число, и потому их можно все перебрать!

* Знак ⋮ означает «делится нацело».

Пример 2. Докажите, что *х(7х* + 2)(5х + 2) ⋮ 3 при любом целом *х*.

Решение. Число *х* от деления на 3 может иметь остатки 0, 1 и 2, т. е. число *х* можно записать одним из следующих способов: *х* = *3к*, *х* = *3к* + 1, *х* = *3к* + *2* при каком-то целом *к*. Но в первом случае рассматриваемое выражение, очевидно, делится на 3, поскольку один из его множителей делится на 3. Во втором случае *7х* + *2* = = 21*к* + 9 ⋮ 3 и, следовательно, все произведение кратно 3. Наконец, в третьем случае 5*х* + 2 = 15*к*+12⋮3,а потому *х(7х* + 2)(5х + 2) ⋮3.

1. Докажите следующие утверждения (*тип*— целые числа):

а) если *3п* + 7 ⋮ 2, то 15л + 35⋮2

б) если *т* + *2* ⋮ 3, то 4m +5⋮3

в) если *т* ⋮ 7, то *3т* ⋮ 21

г) если *2т* + *3п* ⋮ 5, то *8т* - *3п* + 125 ⋮ 5

д) если *т* + *3п* ⋮5, то *24т* + *12п* + 120 ⋮ 20

2. Число a — четное. Может ли остаток от деления а на 8 быть равным 3? 5?

3. Число $в$ кратно 5. Может ли остаток от деления $в$ на 10 быть равен 2? $в$?

4. Число a не делится ни на 2, ни на 3. Найдите:

а) какие остатки оно может иметь при делении на 6;

б) какие остатки при делении на 6 может иметь число a^2.

5. Докажите, что если $a > 3$ и не кратно ни 2, ни 3, то число a^2 при делении на 24 дает остаток, равный 1.

6. Докажите, что ни при каком целом n следующие числа не являются квадратами целых чисел:

а) $3n - 1$ б) $4n + 2$

в) $5n + 2$ г) $5n + 3$

7. Может ли сумма двух последовательных натуральных чисел быть точным квадратом?

8. Известно, что число $a^2 + в^2$ делится на 3 (a, $в$ — целые).

Докажите, что $a^2 + в^2$ делится на 9.