КОМБИНАТОРИКА. ПОДСЧЕТ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Цель: научить решать задачи на подсчет числа вариантов, ввести формулу подсчета перестановок с помощью факториала.

План занятия:

а) Повторение правила суммы.

б) Задачи на умножение возможностей.

в) Исторические задачи. (Выступление учащихся)

г) Изучение нового материала. (Перестановки, факториал).

д) Самостоятельная работа с последующим обсуждением решений.

е) Домашнее задание.

ж) Итог занятия.

Повторение правила суммы.

Рассмотрим следующие примеры:

1. Если на одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой - 40 различных книг (и нет таких, как на первой полке), то сколькими способами можно выбрать одну книгу из стоящих на этих полках? (30+40=70 способами.)

2. *При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира экипажа, 20 - на пост бортинженера и 25 - на пост космонавта-исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур или командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?*

Обобщение: Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b- n способами, причем любой выбор элемента a отличен, от любого выбора элемента b, то выбор a или b можно сделать m+n способами.

Решение задач на умножение возможностей:

а)

Проказница Мартышка
Осел,
Козел,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет…
Стой, братцы стой! –
Кричит Мартышка, - погодите!
Как музыке идти?
Ведь вы не так сидите…
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Тут пуще прежнего пошли у них раздоры
И споры,
Кому и как сидеть…

Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Сколько?

Решение:

Всего 4 места и 4 музыканта. На первое место - 4 способа посадки музыкантов, на второе место - 3,

На третье место - 2 и на четвертое - 1, то есть 4*2*3*1=24 способа.

б) У каждой обезьяны 4 лапы, на каждой лапе 5 пальцев. В стае 20 обезьян. Сколькими способами можно выбрать один палец?

Решение:

Палец на лапе можно выбрать 5 способами, одну лапу из четырех - 4 способами, одну обезьяну из двадцати – 20 способами. Комбинируя любой способ выбора обезьяны, с любым способом выбора лапы, получаем 20-4=80 способов выбора лап. Комбинируя один из 80 способов выбора лапы с любым из пяти способов выбора пальцев, получаем80*5=400 способов выбора одного пальца.

г). Пусть существует три кандидата K_1, K_2, K_3 на место командира корабля и два кандидата B_1 и B_2 на место бортинженера. Сколькими способами можно сформировать экипаж корабля, состоящий из командира и бортинженера?

Решение. Командира корабля можно выбрать тремя способами. После выбора командира еще двумя способами можно выбрать бортинженера, поэтому общее число способов, которыми можно составить экипаж, находится произведением $3 \cdot 2=6$. Графическая иллюстрация этого решения приведена на рисунке 1.

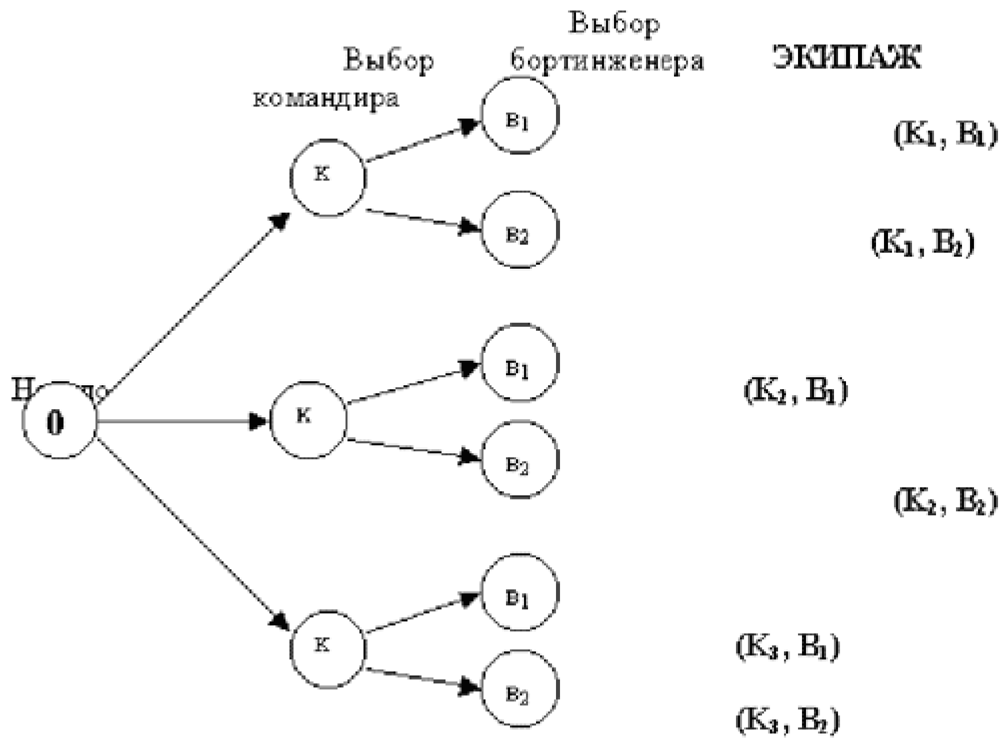

Рисунок 1

Схему, построенную на рисунке, называют деревом. Исходную точку обозначим О. Двигаясь всевозможными путями из точки О к правым крайним вершинам, мы получим 6 способов, которыми можно составить экипаж корабля. Все они перечислены в правом столбце.

в) Сколько существует различных трехзначных чисел, в записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3, и 4?

Решение:

Первой цифрой трехзначного числа, может быть 1,2,3 и 4, значит, для выбора первой цифры существует 4 возможности. После того, как первая цифра уже выбрана, для выбора второй имеется лишь три возможности - одна из цифр уже использована. Каждый выбора первой цифры можно скомбинировать с любым способом выбора второй, значит, первые две цифры можно выбрать 4*3=12 способами. Для выбора третьей цифры остается только две возможности, а всего получается 4*3*2= 24 способа составить число, удовлетворяющее условию задачи. Для выбора четвертой цифры остается только одна возможность. 4*3*2*1=24 числа. Таково же и число путей, ведущих из верхней вершины дерева в одну из нижних. Каждому пути соответствует тройка цифр, по которым этот путь проходит, разные пути - разные тройки.

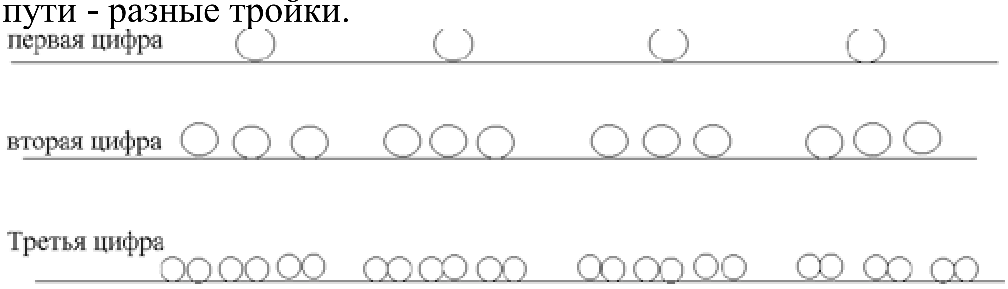

Рисунок 2

Обобщением этих задач является следующее утверждение, называемое правилом произведения

Правило произведения:

Если элемент X можно выбрать k способами, а элемент Y-m способами то пару (X,Y) можно выбрать k*m способами.

То есть, если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно 5*10=

При решении многих практических задач приходится выбирать из некоторой совокупности объектов элементы, обладающие тем или иным свойством, подсчитывать, сколько различных комбинаций можно составить из конечного числа элементов, принадлежащих заданной совокупности, располагать эти элементы в определенном порядке и так далее. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то их называют **комбинаторными** задачами, а область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, - **комбинаторикой**. Комбинаторные методы применяются в физике, химии, биологии, экономике, лингвистике и многих других науках.

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. Несколько тысячелетий назад в Древнем Китае занимались составлением магических квадратов.

Исторические задачи: (Сообщение ученика):

В китайской древней книге “Же-ким” (“Книга перестановок”) приводится легенда о том, что император Ню, живший 4 тысячи лет назад, увидел на берегу реки священную черепаху. На ее панцире был изображен рисунок из белых и черных кружков. Если заменить каждую фигуру числом, показывающим, сколько в ней кружков, получиться такая таблица:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

У этой таблицы замечательное свойство: сумма чисел в каждом столбе, строке и по диагоналям равна 15. Рисунок китайцы назвали “ло-шоу” и стали считать его магическим символом и употреблять при заклинаниях. Поэтому сейчас любую квадратную таблицу, составленную из чисел и обладающую такими же свойствами, называют магическим квадратом

Ответьте на вопрос: сколько способов заполнения квадрата этими числами существует?

9*8*7*6*5*4*3*2*1=362880. Сколько же из них магических?

1+2+4+5+6+7+8+9=45, Значит в каждой строке, столбце и диагонали сумма чисел должна равняться 15. Если просуммировать все числа во-вторых столбце и строке и в обеих диагоналях, то каждое число войдет один раз за исключением центрального, которое войдет четырежды. Если обозначить центральное число за X, то должно выполняться равенство 4*15=3x+3*15, отсюда x=5, то есть в центре таблице должно стоять число 5. Число 9 не может стоять в углу таблицы, ведь тогда в другом углу должно стоять число 1, а на первую строку и столбец оставалась лишь одна комбинация - числа 4 и 2. Значит 9 стоит в середине каких-то крайних строк и столбцов. Двумя другими числами этой строки являются числа 4 и 2, а третьим числом среднего столбца должно быть 15-9-5=1. в одной строке с 1 должны стоять числа 8 и 6. легко заполнить остальные клетки.

4	9	2
	5	
8	1	6

Но для числа 9 можно выбрать другие три места, а после выбора места для этого числа остаются две возможности для расположения чисел 4 и 2. Всего получается 4*2=8 различных магических квадратов

Инсценированная задача:

Ребята, представьте, что мы с вами оказались в конце XIX века на постоялом дворе.

Пассажир ходит, ожидая кучера. Затем появляется кучер и проезжий спрашивает:

- *Не пора ли запрягать?*

- *Что вы! - ответил кучер. - Еще полчаса до отъезда. За это время я успею 20 раз, и запрячь, и отпрячь, и опять запрячь. Нам не впервой...*

- *А сколько в карету впрягается лошадей?*

- *Пять.*

- *Сколько времени полагается на запряжку лошадей?*

- *Да минуты 2, не более.*

- *Ой, ли? - усомнился пассажир. - Пять лошадей запрячь в две минуты... Что-то уж очень скоро!*

- *И очень просто, - отвечал кучер. - Выведут лошадей в сбруе, постромках с вальками, в вожжах. Остается только накинуть кольца вальков на крюки, приструнить двух средних лошадей к дышлу, взять вожжи в руки, сесть на козлы и готово... Поезжай!*

- *Ну, хорошо! - заметил пассажир. - Допустим, что таким образом можно запрячь и отпрячь лошадей хоть 20 раз в полчаса. Но если их придется перепрягать одну на место другой, да еще всех, то уж этого не сделать не только в полчаса, но и в два часа.*

- *Тоже пустячное дело! - расхвастался кучер. - Разве нам не приходится перепрягать! Да какими угодно способами я их всех перепрягу в час, а то и меньше - одну лошадь на место другой поставил, и готово! Минутное дело!*

- *Нет, ты перепряги их не теми способами, которые мне угодны, - сказал пассажир, - а всеми способами, какими только можно перепрячь 5 лошадей, считая на перепряжку одну минуту, как ты хвастаешь.*

Самолюбие кучера было задето..

- *Конечно, всех лошадей и всеми способами я перепрягу не более как за час.*

- *Я дал бы 100 рублей, чтобы посмотреть, как ты сделаешь это за час! - сказал пассажир.*

- *А я при всей своей бедности заплачу за ваш проезд в карете, если я этого не сделаю, - ответил кучер.*

Так и условились.

Итак, ребята, кучер с пассажиром задали нам задачу. Кто же из них выиграет спор?

Решают сами. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ *(способов), значит, за один час кучер не успеет справиться с заданием.*

Изучение нового материала:

В комбинаторике принято каждому виду комбинаций давать специальное название. Сегодня мы познакомились с перестановками.

Перестановкой из n-элементов называется комбинация, в которой все эти n элементов расположены в определенном порядке. Таким образом, перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Пример1.Вот все перестановки из букв A, B, C: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Как это можно подсчитать? 3*2*1*=6.

При подсчете перестановок из n элементов первый элемент можно выбрать n способами, после чего второй элемент – (n-1) способами, после чего третий элемент – (n-2) способами и так далее.

Всего получим n*(n-1)*(n-2)*…*2*1=n!

Вычислите: 2!= 3!= 4!= 5!= 6!= 7!= Запишите: 8!=40320 9!=362880 10!=3628800 0!=1 1!=1

Пример 2. Сколькими способами можно распределить 5 подарков между пятью детьми?

Обучающая самостоятельная работа по карточкам:

1. Подсчитайте сколько возможных комбинаций набора шифра в камере хранения, если первый знак кода буква, а четыре остальных знака цифры.(33*10*10*10*10=330000).
2. Сколько возможных исходов в лотерее “Спортлото”, где нужно угадать 6 из 49 чисел. (49*48*47*46*45*44=10068347520, так как порядок угаданных чисел нам не важен, то подсчитаем, сколько получится наборов из одинаковых чисел 6!=720 разделим 10068347520 на 720, получим 13983816).
3. Сколькими способами можно расставить на полке 10 разных книг? (10!=3628800)
4. Вычислите: а) (3!+4!)*0,5 б) $\frac{3!+4!+5!}{6!}$ в) $\frac{(5!+7)*2!}{0!+4!}$

Домашнее задание:

1. У Деда Мороза в мешке 7 различных подарков, которые можно определенным образом распределить среди пяти детей. Сколькими способами можно это сделать?
2. В классе 26 человек. Нужно выбрать команду из 6 человек для участия в конкурсе. Сколькими способами можно это сделать?

Итог занятия:

1. Когда применяют правило произведения? Примеры.
2. Что такое перестановка из 3, 4, 5 элементов. Как подсчитать число перестановок?
3. Зачем необходимо уметь решать задачи на подсчет вариантов?