РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ОЦЕНКИ

Логическая разминка.

Установление связи с предыдущими занятиями для достижения поставленной цели: что было важным, нужным, что надо продолжить. Индивидуальное и коллективное целеполагание предстоящей работы.

Работа с таблицей: “Оценить выражение” .

1. $|a+b| \le |a| + |b|$

2. $a^2 + b^2 \ge 2|a+b|$

3. $a + \frac{1}{a} \ge 2, если\, a > 0$

$a + \frac{1}{a} \le -2, если\, a < 0$

$|a| + \frac{1}{|a|} \ge 2$

4. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$

5. $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, a \ge 0, b \ge 0$

6. $|a \sin x + b \cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$

Постановка проблемы:

Задача → Самостоятельный поиск решения → Обсуждение в группе → Разбор решения задачи → Выделение идеи

Творчески применяя полученные знания, вам предлагаются задания, которые имеют как идейную, так и техническую сложность, успешное их решение – в умении пользоваться “техникой оценки выражения”, когда оцениваются границы, в которых могут лежать значения каждой из частей заданного уравнения или неравенства.

Не опираясь на дополнительные теоретические сведения, выход на эту идею строится по схеме:

Анализируя решенные задания, вы должны прийти к выводу, когда есть предположение, что данная задача может быть решена методом оценки. Рассматривается каждая индивидуальная версия учеников в группе, происходит их сопоставление и обсуждение.

Карточки для работы в группах:

1. $-\cos(7\pi x) = x^2 - 6x + 10$
2. $\cos^6 x + \sin^2 3x + 4 \sin 9x = 7$
3. $\cos x \ge y^2 + \sqrt{y - x^2}$
4. $2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} \le 0$
5. $\begin{cases} tg^2 x + ctg^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$

Предполагаемые решения задач (версия учителя, к которой могут прийти учащиеся)**:**

1) $-\cos(7\pi x)=x^2-6x+10$;

Решение.

$-\cos 7\pi x\le 1$;

$x^2-6x+10=(x-3)^2+1,\textit{следовательно}$, $x^2-6x+10\ge 1$.

Данное уравнение равносильно системе

$\begin{cases}-\cos 7\pi x=1,\\ x^2-6x+10=1;\end{cases}\begin{cases}-\cos 21\pi=1,\\ x=3.\end{cases}$

Ответ: 3

2) $\cos^6 x+\sin^2 3x+4\sin 9x=7$

Решение.

$\cos^6 x\le 1$, $\sin^2 3x\le 1$, $4\sin 9x\le 4$, *следовательно,* $\cos^6 x+\sin^2 3x+4\sin 9x\le 6$

Данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

3) $\cos x\ge y^2+\sqrt{y-x^2}$

Решение.

$\cos x\le 1$, $y-x^2-1\ge 0$, $y\ge x^2+1$, $y\ge 1$, *следовательно,*

$y^2+\sqrt{y-x^2-1}\ge 1$, следовательно, $\begin{cases}\cos x=1,\\ y^2+\sqrt{y-x^2-1}=1\end{cases}\begin{cases}\cos x=1,\\ \sqrt{y-x^2-1}=1-y^2\end{cases}$

$\begin{cases}x=0,\\ y=1.\end{cases}$

Ответ: (0;1)

4) $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\le 0$

Решение.

$y-x^2-1\ge 0, y\ge x^2+1, y\ge 1.$, следовательно, $2^y\ge 2,$

$2^y\le 2\cos x-\sqrt{y-x^2-1}$, $2\cos x\le 2$, $2\cos x-\sqrt{y-x^2-1\ge 2}$, следовательно,

$\begin{cases}2^y=2,\\ 2\cos x-\sqrt{y-x^2-1}=2,\end{cases}\begin{cases}y=1,\\ x=0.\end{cases}$

Ответ: (0;1)

5) $\begin{cases}tg^2x+ctg^2x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1\end{cases}$

Решение.

$tg^2x+ctg^2x\ge 2$, $2\sin^2 y\le 2$, следовательно, $tg^2x=1$, $\sin^2 y=1.$

Подставляем последнее равенство во второе уравнение системы, получаем: $\cos^2 z=0.$ Решая полученные тригонометрические уравнения, получаем ответ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, y=\frac{\pi}{2}+\pi n, z=\frac{\pi}{2}+\pi m, k,n,m\in Z$

*Обсуждение итогов работы в группах, сопоставление полученных алгоритмов, новая идея решения математических задач***.**

Все разнообразные задачи достаточно не похожи друг на друга, однако их решения содержат общую идею - оценить одно аналитическое выражение другим выражением (чаще всего конкретным числом). "*снизу*", а другое – этим же числом *"сверху"*. Анализируя приведенные примеры, попытаемся сделать вывод, когда есть предположения, что данная задача может решаться методом оценки:

- если в данной части соотношения стоят ограниченные функции, а в другой конкретные числа;
- если в задаче переменных больше, чем заданных соотношений;
- если в соотношениях содержатся разного вида функции;
- если в задаче просматриваются неравенства, основанные на свойствах среднего арифметического, среднего степенного, неравенства или им подобные.

Конечно, все эти признаки не гарантируют того, что задача решается методом оценки.

Кроме того, порой применение метода сложно в техническом исполнении, поэтому, для того, чтобы овладеть им и уметь видеть, когда его применение принесёт успех, нужно прорешать большое количество задач такого типа.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача:	***Ответ:***
$\cos x = 1 + x^2$	0
$2^{\cos x} = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$	$2\pi k, k \in Z$
$2^{-\cos x} = \log_\pi x + \log_x \pi$	π
$x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$	$x = 3, y = 4$
$\left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(1 + tg^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4$	$\left[\begin{array}{l} x = \pi m, \\ y = \dfrac{\pi n}{2}, \\ Z = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3}, m, n, k \in Z \end{array}\right.$
$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin^2 x \cos^2 y$	$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, y = 2\pi n, n \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, y = \pi + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

$x^2+\frac{1}{x^2}=2-(x-1)^2$	1
$\sin^2 5x+1=\cos^2 3x$	$\pi m, m\in Z$
$\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2$	$4\pi l, l\in Z$