УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

При решении уравнений в целых числах часто приходится использовать утверждения о делимости.

Пример 1. Докажите, что уравнение

 $x^{2}(x^{2} + 5) = 2000$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Заметим, что x^2 ($x^2 + 5$) : 3 при всех целых x (в самом деле, если x : 3, это очевидно, но если x не кратно 3, то x имеет вид 3k + 1 при каком-то k, а потому $x^2 + 5$: 3). Но 2000 не делится на 3, поэтому таких целых x, чтобы выполнялось данное равенство, нет.

Иногда приходится использовать и более сложные соображения.

Пример 2. Решите уравнение (x + 1) (5x + 2) = 14 в натуральных числах.

Решение. Нам надо найти все натуральные числа x, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное равенство. Но заметим, что число 14 можно представить в виде произведения натуральных чисел лишь следующими способами: 1 • 14, 2 • 7, 7 • 2, 14 • 1. Ясно, что нет таких натуральных x, что x + 1 = 1, или 5x + 2 = 1, или 5x + 2 = 2. Поэтому остается лишь одна возможность: одновременно выполняются два равенства x + 1 = 2 и 5x + 2 = 7. Такое число x имеется ровно одно, это x = 1.

Omeem: x = 1.

Некоторые уравнения в целых числах удается решить подбором, доказав, что других решений они не имеют.

Пример 3. Решите уравнение $x^2(x+1)=12$ в натуральных числах.

Решение. Это уравнение можно решить тем же методом, что и предыдущее (попробуйте это сделать!), но можно рассуждать и по-другому. Очевидно, x = 2 является корнем уравнения. Покажем, что других корней нет. Ясно, что x = 1 — не является корнем уравнения, а если взять x > 2, то x + 1 > 3 и x > 2, поэтому x > 2 (x + 1) x > 1. Следовательно, такое число тоже не может быть корнем. *Ответ:* x = 2.

1. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:

a)
$$2x^2 + 164 x = 1999$$

6)
$$x(x + 3) = 1999$$

$$\mathbf{B}) x(x+2)(4x+1) = 1999$$

$$\Gamma(x^2 + 2) = 1999$$

д)
$$x^2 - 1 = 7$$

2. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах:

a)
$$5x^3 + 4x = 3$$

6)
$$3x + 5x^4 = 4$$

B)
$$(x+1)/x + (x^3+1)/x^3 = 1$$

3. Решите уравнение в натуральных числах:

a)
$$5x^2 + 3x = 8$$

$$6) x(x + 1)(x + 2) = 6$$

B)
$$x(x + 2)(x + 4) = 15$$

4. Решите уравнение в целых числах:

a)
$$x(x + 2) = 3$$

$$6) x^2(x + 2) = 11$$

B)
$$x(x - 5) = 6$$

$$\Gamma$$
) $x(x - 3) = 10$

- **5.** В прямоугольной таблице несколько строк и несколько столбцов. Столбцов на четыре больше, чем строк. Всего в ней 45 клеток. Сколько в таблице строк и столько столбцов?
- **6.** Завуч размышляет, в каком порядке поставить уроки в 7 классе в пятницу (все планируемые на этот день уроки различны). Всего у него 24 возможности. Сколько уроков планируется провести в пятницу?
- **7.** В выпуклом многоугольнике девять диагоналей. Сколько вершин у этого многоугольника?
- **8.** Робин-Бобин Барабек сперва хотел съесть несколько коробок конфет «Белочка», но потом передумал и предпочел трюфели. Правда, в коробке трюфелей конфет оказалось на четыре меньше, чем в коробке с «Белочкой», поэтому, чтобы съесть запланированное число конфет 120, Барабеку пришлось съесть на одну коробку больше, чем он планировал. Сколько коробок конфет съел Робин-Бобин?