# ИНВАРИАНТ

*Пример 1.* Женя и Жора меняются друг с другом марками по следующим правилам: за 8 английских марок дают 14 французских и 3 немецких, за 5 испанских и 2 французских дают 6 португальских и 11 норвежских, за 4 датских и 5 шведских дают 6 португальских и 8 голландских. Могло ли в результате обменов по этим правилам получиться так, что у Жени стало в полтора раза больше марок, чем было, а у Жоры на две марки больше?

*Решение.* Конечно, нет: ясно, что общее число марок у Жени и у Жоры никак в ходе обменов не меняется и возрасти не может.

В решении этой шуточной задачи применена очень важная и серьезная идея — здесь найден, как говорят, инвариант, т. е. то, что не меняется при всех производимых операциях.

Как доказать, что в результате каких-то операций от данной ситуации нельзя было перейти к какой-то другой? Для этого достаточно найти какой-нибудь инвариант — то, что не меняется при всех операциях, — и показать, что в двух рассматриваемых ситуациях он различен.

*Пример 2.* В строке 1999 раз написано число -1. За одну операцию разрешается взять любые восемь написанных в строчке чисел и поменять у них знаки. Можно ли с помощью таких операций добиться того, чтобы все числа в строчке были равны 1?

*Решение.* Ясно, что легко можно сделать так, чтобы в строке появилось 8 единиц, 16 единиц и даже 800 и 1600 единиц. Но добиться того, чтобы в строке остались одни единицы, невозможно и это легко доказать. Заметим, что произведение всех чисел, записанных в строке, при производимой операции не меняется: мы восемь чисел умножаем на -1,а $(-1)^2 = 1$. Но в начальной ситуации произведение всех чисел в строке равно -1, а если все числа в строке равны 1, то 1. Сколько бы раз мы ни производили разрешенную операцию, произведение чисел в строке от этого не изменится, значит, прийти к тому, чтобы все числа в строке стали единицами, невозможно.

Похожую идею можно применить на первый взгляд в совсем другой ситуации.

*Пример 3.* В квадрате 8 х 8 одна клетка закрашена в черный цвет, а остальные — в белый. За один ход разрешается перекрашивать все клетки в одной строке или в одном столбце — белые клетки в черный цвет и наоборот. Можно ли добиться того, чтобы все клетки оказались покрашенными в черный цвет?

*Решение.* Заметим, что если в строке или столбце, которые мы перекрашиваем, было $k$ черных клеток, то их там станет $8 - k$. Но числа $k$ и $8 - k$ либо оба четные, либо оба нечетные. Поэтому ясно, что четность числа черных клеток не меняется при производимой операции, но в начале их было нечетное число, значит, четное число — все 64 клетки — получиться не может.

Заметим, что эта задача очень похожа на предыдущую. Поставим в черную клетку -1, а в белые 1. Теперь, вместо того чтобы перекрашивать клетки, будем все числа (в строке или столбце) умножать на -1. Ясно, что произведение всех чисел в таблице при этом не меняется. Но вначале оно было равно -1, а в желанной ситуации 1, значит, добиться ее невозможно.

**1.** На доске записаны числа: 1, 2, 3, 4, ..., 1998. За один ход разрешается стереть любые два числа $x$ и $y$ и написать вместо них одно число $x + y$. В конце на доске остается одно число. Может ли быть, что это число 2957?

**2.** На доске записаны числа: 1, 2, 3, 4, ..., 1998. За один ход разрешается стереть любые два числа *x и y и* написать вместо них одно число $xy$. В конце на доске остается одно число. Может ли быть, что это число 8976?

**3.** На доске записаны числа: 1, 2, 3, 4,..., 1998. За один ход разрешается стереть любые три числа $x$, $y$ и $z$ и написать вместо них два числа $(2x + y — z)/3$ и $(x + 2y + 4z)/3$. В конце на доске остается два числа. Может ли быть, что это числа 2051 и 3566?

**4.** У Жени в библиотеке 624 тома, а у Светы — 641 том. Женя купил несколько двухтомников стихов и несколько четырехтомных романов, а Света купила несколько словарей (двухтомных и шеститомных) и несколько энциклопедий (десятитомных и двадцатитомных). Женя утверждает, что после всех покупок у него стало на 112 томов больше, чем у Светы. Прав ли он?

**5.** На доске записаны числа: 1, 2, 3, 4, ..., 1998. За один ход стирают любые два числа $x$ и $y$ и, если их сумма делится на два, пишут двойку, если нет, то единицу. В конце на доске остается одно число. Может ли быть, что это число 2?

**6.** На доске записаны числа 1997, 1998, 1999. За один ход разрешается стереть три числа *а, в, с* и написать вместо них числа *ав/с, ас/в, вс/а*. Можно ли добиться того, чтобы на доске оказались числа 1994, 1995, 1996?

**7.** В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ или добавить в любое место буквосочетания ЫУ или УУЫЫ, то смысл слова не изменится. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

**8.** Хулиган Женя порвал газету, причем каждый попадающийся ему кусок он рвал на четыре части. Могло ли в итоге получиться 1997 кусков?

**9.** В банке данных находится несколько чисел. Разрешается заносить в банк любые числа вида $ax + by$, где $x$ и $y$ — числа из банка, а $a$ и $b$ — целые числа. В банке первоначально находились только числа 1917, 1941 и 1998. Может ли в банке оказаться число 1999?

**10.** На столе стоит семь стаканов — все вверх дном. За один ход разрешается перевернуть любые четыре стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

**11.** В стакане летают две мухи, скорости полета меняются них лишь при столкновении. Если до столкновения скорость первой была $u$, а второй и, то после столкновения их скорости будут соответственно равны $u$ $(u + 2v)/($ $u$

$+ v)$ и $v^2/ u + v$. Может ли получиться так, что через несколько столкновений скорость первой мухи увеличится в 1,3 раза, а второй в 1,4 раза?

**12.** Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. За один ход разрешается сдвинуть любые две фишки в соседние с ними секторы. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

**13**. В стране Серобурмалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?