РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Этот раздел является продолжением занятия кружка в 6-м классе по теме **«Элементы теории вероятности»**. Объяснение нового материала рекомендуется вести на примерах задач.

Занятие 1

Тема: **Введение в комбинаторику**

Ход занятия

Вводная беседа

На занятиях кружка в 6-м классе мы, рассматривая некоторые вопросы теории вероятностей, отметили что для вычисления вероятности того или иного события необходимо уметь подсчитывать количество способов расположения элементов, выпадения определенного условия и т.д. Этими вопросами занимается раздел математики – комбинаторика.

КОМБИНАТОРИКА – раздел математики, в котором изучаются различные вопросы, связанные с взаимным расположением частей данного множества, состоящего обычно из конечного числа элементов.

Комбинаторные задачи обладают общей особой приметой. Этой приметой является вопрос задачи, который всегда можно сформулировать так, что он будет начинаться словами: «Сколькими способами …?». Комбинаторные задачи различаются по подходам к решению. Рассмотрим некоторые основные комбинаторные идеи, лежащие в основе решения некоторых из них.

Объяснение нового материала

Рассмотрим первый вид задач на примере:

В магазине «Ткани» имеются ткани четырех расцветок и шесть видов отделки к ним. Сколькими способами можно купить ткань и отделку для платья?

Решение. Сначала выберем ткань, это можно сделать четырьмя способами. В комплект к ней (к каждому из четырех способов) можно подобрать шестью способами отделку, т. е. можно подобрать четыре раза по шесть комплектов: 4•6 = 24. Всего существует 24 способа.

При решении такого вида задач применяется правило произведения: Пусть нам даны k множеств по n_1, n_2, n_3,, n_4,... ,n_k элементов каждое, и нам нужно произвести выбор по одному в каждом из множеств, тогда число возможных способов находим так:

$N = n_1\ n_2\ n_3\ n_4 \ldots n_k$.

Решение упражнений

40. В магазине «Сувениры» имеются подсвечники шести видов и три вида вазочек к ним. Сколькими способами можно составить подарочный комплект из подсвечника и вазочки?

Решение. Вазочку можно выбрать шестью способами и к каждой вазочке тремя способами можно подобрать подсвечник: 6•3 = 18 способов.

41. В магазине «Все для чая» имеются в продаже шесть видов разных чашек, пять видов блюдец и три вида ложек. Сколькими способами можно составить набор из трех предметов?

Решение. Чашку можно выбрать шестью способами, к каждой из шести чашек можно подобрать пятью способами блюдце, к каждому из 30 комплектов чашки с блюдцем можно подобрать тремя способами ложку:

6•5•3 = 90 способов.

42. От Гулливера в страну Лилипутов ведут три секретные дороги, а в страну Великанов – четыре. Сколькими способами Гулливеру можно попасть в страну Великанов?

Решение. 3•4 = 12 способов (рис. 11).

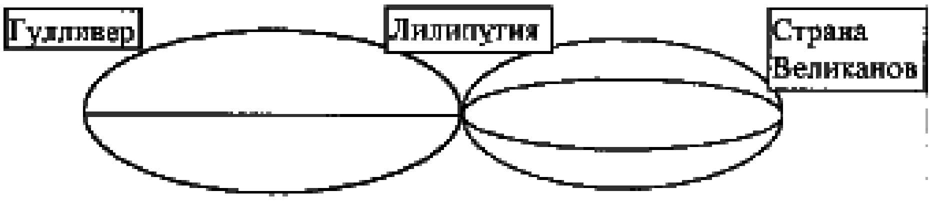

Рис. 11

43. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черную и белую ладьи, чтобы они не били друг друга?

Решение. Первую ладью можно поставить на любое из 64 полей. В этом положении ладья будет бить 15 полей (включая то, на котором она стоит). Следовательно, вторую ладью можно поставить 64 – 15 = 49 способами. Всего имеем

64•49 = 3136 способов.

44. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого королей, чтобы получилась ситуация, допустимая правилами?

Решение. Задача разбивается на несколько случаев, которые удобно записать в виде таблицы:

Случай	В углу доски	На краю доски	В центре доски
Сколько способов размещения первого короля	4	24	36
Сколько полей бьет	4	6	9
Сколько полей остается для второго короля	60	58	55
Сколько способов размещения	460 = 240	2458 = 1008	3655 = 1980

Всего 240 + 1008 + 1980 = 3228 способов.

Домашнее задание

45. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого ферзей, чтобы они не били друг друга?

Решение. Аналогично задаче про королей получается несколько случаев, которые удобно записать в виде таблицы:

Случай	На краю доски	Во втором ряду от края доски	В третьем ряду от края доски	В четвертом ряду от края доски
Сколько способов размещения первого ферзя	28	20	12	4
Сколько полей бьет	22	24	26	28
Сколько полей остается для второго ферзя	42	40	38	36
Сколько способов размещения	2842 = = 1176	2040 = = 800	1238 = = 456	436 = 144

Всего 1176 + 800 + 456 + 144 = 2576 способов.

46. В магазине «Канцелярские товары» имеются в продаже шесть видов цветных карандашей, семь видов красок и пять видов цветной бумаги. Сколькими способами можно составить комплект для уроков художественного труда, состоящий из коробки цветных карандашей, красок и набора цветной бумаги?

Решение: 6•7•5 = 210 способов.

47. Сколькими способами можно составить в предыдущей задаче комплект из двух предметов?

Решение. Составить комплект из двух предметов можно тремя способами:

	Карандаши и краски	Краски и цветная бумага	Цветная бумага и карандаши
Число способов	67 = 42	75 = 35	65 = 30

Всего 42 + 35 + 30 = 107 способов.

Занятие 2

Тема: **Введение в комбинаторику**

Ход занятия

Объяснение нового материала

Вторую группу задач рассмотрим на примере:

Сколько пятизначных чисел можно составить, используя только цифры 3 и 5.

Решение. Первую цифру можно выбрать двумя способами, вторую – также двумя способами, третью – двумя и так далее. Получаем:

N = 2•2•2•2•2 = 2^5.

В данной задаче порядок расположения объектов не имеет значения, зато имеет значение, какие именно объекты выбраны из некоторого множества. Например, из 25 учеников класса выбраны 5 участников команды интеллектуального марафона и т. п.

Обобщим: на каждое из n мест может быть поставлен элемент m – элементного множества. Тогда количество способов расположения элементов можно найти по формуле m^n.

Решение упражнений

48. Монету бросают трижды. Сколько различных последовательностей «орлов» и «решек» при этом можно получить?

Решение: $2^3 = 8$ различных последовательностей.

49. Рекламный агент составляет эскиз рекламного щита. Он решил сделать фон в виде квадратной таблицы 2•2, каждую клетку которой закрасить либо в зеленый, либо в желтый цвет. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $2^4 = 16$ различных способов.

50. На сколько увеличится число способов в предыдущей задаче, если сделать таблицу 3•3?

Решение: $2^9 = 512$ способов выкрасить таблицу 3•3. Число способов увеличится на 512 – 16 = 496.

51. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из букв А, У и С. Словом является любая последовательность, состоящая из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Решение: $3^4 = 81$ слово.

52. С течением времени наука в племени Мумбо-Юмбо резко шагнула вперед и словарный запас увеличился. Словом стала считаться любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов стало в словаре племени Мумбо-Юмбо?

Решение. Получаем в языке племени Мумбо-Юмбо слова, состоящие из одной, двух, трех и четырех букв. Подсчитаем их количество отдельно:

однобуквенных слов – 3;

слов из двух букв – 32 = 9;

слов из трех букв – 33 = 27;

слов из четырех букв – 81.

Всего 3 + 9 + 27 + 81 = 120 слов.

53. «Опять восьмерка!» – горестно воскликнул председатель клуба велосипедистов, взглянув на погнутое колесо своего велосипеда, и продолжим: «А все потому, что при вступлении в клуб мне выдали билет за номером 008. И теперь не проходит и месяца, чтобы то на одном, то на другом колесе не появилась восьмерка. Надо поменять номер билета». Чтобы председателя не обвинили в суеверии, он решил объявить полную перерегистрацию всех членов клуба и выдавать только билеты с номерами, не содержащими цифру 8. Сколько членов было в клубе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?

Решение: $9^3 = 729$ членов в клубе велосипедистов.

Домашнее задание

54. В другом клубе велосипедисты были еще суевернее. И так как число 0 похоже на вытянутое колесо, решили отказаться и от него и обходиться только восемью цифрами. Сколько членов было в этом клубе, если номера билетов были также трехзначными?

Решение: $8^3 = 512$ членов в клубе велосипедистов.

55. Назовем «симпатичным» число, если в его записи участвуют только нечетные цифры. Сколько существует четырехзначных «симпатичных» чисел?

Решение: $5^4 = 625$ четырехзначных «симпатичных» чисел.

56. Имеются 9 кг крупы и гири в 50 г и 200 г. Необходимо отмерить 2 кг этой крупы. Какое минимальное количество взвешиваний для этого потребуется.

Решение: три.

Первое взвешивание	Разделить поровну на каждую чашку весов	На одной чашке имеем 4 кг 500 г
Второе взвешивание	Разделить содержимое одной чашки поровну на каждую чашку весов	На одной чашке весов имеем 2 кг 250 г
Третье взвешивание	От содержимого одной чашки весов с помощью гирь отмерить 250 г	Останется 2 кг

Занятие 3
Тема: Перестановки из n элементов
Ход занятия

Объяснение нового материала

В сборнике занимательных задач Я.Перельмана «Живая математика» есть рассказ «Бесплатный обед». В нем описывается случай, происшедший с десятью выпускниками, которые не могут отпраздновать окончание школы, потому что никак не решат: в каком порядке им сесть.

На выручку им пришел официант, который предложил сегодня сесть, как придется, на другой день придти и сесть по-другому и так каждый день, пока не наступит такой день, когда они опять сядут так, как сидят сегодня. И тогда официант обещал угостить всех бесплатным обедом. Как вы думаете, долго ли друзьям придется дожидаться бесплатного обеда?

Решение. Первого, сидящего за столом, можно выбрать десятью способами, второго к нему можно выбрать девятью способами, третьего – восемью и т.д. Таким образом, имеем: $P_n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

В данной задаче необходимо подсчитать число перестановок из 10 элементов.

Перестановкой из n элементов называют упорядоченный набор этих элементов. Обозначают P_n.

Произведение $P_n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ можно записать короче $P_n = 10! = 3628800$. Выражение вида п! называется факториалом, читается «Эн факториал». Число п! с ростом п растет очень быстро. Это означает, что на самом деле официант ничем не рисковал, так как обещанное событие произойдет почти через 10 000 лет.

Решение упражнений

Устное упражнение (на закрепление понятия факториала). Вычислите

$8! \cdot 9!;\ 3! \cdot 4!;\ \frac{4!}{3};\ \frac{5!}{3 \cdot 4};\ \frac{100!}{98!};\ \frac{76!}{75!}.$

57. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1; 2; 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение: $P_n = 3! = 6$ чисел.

58. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий, белый и зеленый шарики?

Решение: $P_n = 5! = 120$ способов.

59. Всем известна знаменитая басня Ивана Крылова «Квартет»:

Проказница Мартышка,
Осел, Козел
Да косолапый Мишка
Затеяли квартет…

Как помнится, герои басни никак не могли усесться. Подсчитайте, сколькими способами герои квартета могут пересаживаться? Решение. $P_n = 4! = 24$ способа.

60. Необходимо составить школьное расписание на один учебный день для шестого класса из шести предметов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $P_n = 6! = 720$ способов.

61. Перепишите выражения так, чтобы в их записи не содержался факториал:

$$\text{а) } \frac{(n-1)!}{n!};\quad \text{б) } \frac{n!\cdot(n-1)}{(n+2)!};\quad \text{в) } \frac{(n+1)!\,n}{n!};\quad \text{г) } \frac{n!}{(n+1)!}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{n}$; б) $\frac{n-1}{(n+1)(n+2)}$; в) $n(n+1)$; г) $\frac{1}{n+1}$.

62. Перепишите выражения, чтобы в их записи содержался знак факториала:

$$\text{а) } n-1;\qquad \text{б) } n;\qquad \text{в) } \frac{1}{n(n-1)};\qquad \text{г) } \frac{n}{n-1}.$$

Ответ. а) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$; б) $\frac{n!}{(n-1)!}$; в) $\frac{(n-2)!}{n!}$; г) $\frac{(n-2)!\,n}{(n-1)!}$.

Домашнее задание

63. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{n!}{n(n-1)(n-2)};\quad \text{б) } \frac{(n+1)!}{(n-1)!};\quad \text{в) } \frac{(n+1)!}{(n-2)!};\quad \text{г) } \frac{n(n-3)!}{n!}.$$

Ответ: а) $(n-3)!$; б) $n(n+1)$; в) $n(n^2-1)$; г) $\frac{1}{(n-1)(n-2)}$.

64. Рекламный агент составляет эскиз для фасада центрального офиса. Ему заказали оформить его полосами, используя красный, розовый, белый и малиновый цвета. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $P_n = 4! = 24$ способа.

Занятие 4
Тема: Размещения из п элементов по т
Ход занятия

Повторение пройденного

а) $\frac{8!}{6!}$; б) $\frac{4!\cdot 5!}{6!}$; в) $\frac{3!\cdot 6!}{5!}$; г) $\frac{6!}{8\cdot 5!}$.

Ответ: а) 56; б) 4; в) 36; г) 0,75.

Объяснение нового материала

Бывают случаи, когда нам необходимо расположить не все элементы множества, а лишь часть из них, выбранную по какому-либо признаку. Например, сколько существует вариантов составления школьного расписания из шести предметов для одного класса, если всего в классе изучается 12 учебных дисциплин и расписания отличающиеся различным порядком предметов считаются различными)?

Решение: $A_{12}^6 = 12\bullet 11\bullet 10\bullet 9\bullet 8\bullet 7 = 665280$ вариантов.

В данной задаче необходимо вычислять количество размещений.

Вообще, размещением из п элементов по т называется упорядоченное подмножество из п элементов множества, имеющего т элементов.

Решение упражнений

65. Сколькими способами можно выбрать четырех участников из 15 членов сборнойи расставить их для эстафеты 800 + 400 + 200 + 100.

Решение: Так как порядок размещения существен, имеем: $A_{15}^4 = 15\bullet 14\bullet 13\bullet 12 = 32760$ способов.

66. Сколькими способами можно выбрать в команде из 10 человек, участвующих в интеллектуальном марафоне, капитана и его заместителя?

Решение: $A_{10}^2 = 10\bullet 9 = 90$ способами.

67. Пусть словом считается любая последовательность из четырех букв. Сколько слов тогда можно составить из букв, составляющих слово МАТЕМАТИКА (если все буквы считать различными)?

Решение: $A_{10}^4 = 10\bullet 9\bullet 8\bullet 7 = 5040$.

68. Учащиеся седьмых классов решили высадить около школы три аллеи. На ярмарке были саженцы березы, липы, дуба, клена, рябины, ели, акации, тополя и каштана. Сколькими способами ребята могут закупить саженцы, если они решили в одну аллею высаживать только одинаковые деревья.

Решение: $A_9^3 = 9\bullet 8\bullet 7 = 504$.

69. Члены школьной редколлегии решили, что для оформления стенной газеты (рамка, фон, заголовок) необходимо из палитры цветов выбрать три. Сколькими способами это можно сделать, если у ребят в наличии имеется 12 цветов?

Решение: $A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Домашнее задание

70. На сколько увеличится количество способов в задаче 68, если на другой день, когда пришли ребята, на ярмарке появились ещё и саженцы осины?

Решение: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, $720 – 504 = 216$.

71. Пусть словом считается любая последовательность из четырех букв. Сколько слов тогда можно составить из букв, составляющих слово КАЛЬКУЛЯТОР (если все буквы считать различными)?

Решение: $A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$ слов.

72. В предыдущей задаче часть слов будет отличаться расположением одинаковых букв «К». Во сколько раз уменьшится число слов в языке, если считать эти слова одинаковыми?

Ответ. В два раза, так как в слове есть две одинаковые буквы «К».

Занятие 5
Тема: Сочетания из n элементов по m
Ход занятия

Объяснение нового материала

В некоторых задачах порядок расположения элементов последовательности не имеет значения, важно лишь то, какие именно элементы составляют эту последовательность.

Рассмотрим пример

В одном классе сложилась традиция, по которой каждое утро мальчики каждый с каждым обмениваются рукопожатием. Сколько всего рукопожатий происходит каждое утро, если в данном классе 12 мальчиков? Решение. Каждый из 12 мальчиков обменивается рукопожатием с 11 товарищами. Получается $12 \cdot 11 = 132$ рукопожатия. Однако каждое рукопожатие при таком подсчете учитывается дважды, т.е на самом деле рукопожатий в два раза меньше: $132 : 2 = 66$.

В данной задаче необходимо вычислить сочетания из n элементов по m:

$$A_{12}{}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66.$$

Вообще, сочетанием из n элементов по m называется неупорядоченное подмножество из n элементов множества, имеющего m элементов.

Сочетание из n элементов по m отличается от подобного ему размещения тем, что порядок элементов в нем несуществен, т.е два сочетания, отличающиеся друг от друга только порядком элементов, считаются одинаковыми.

Такого рода задачи довольно распространены. Рассмотрим некоторые из них.

Решение упражнений

73. Школьное расписание содержит шесть уроков. Сколько всего можно составить таких расписаний при выборе из 12 учебных дисциплин (без учета порядка предметов)?

$$C_{12}^{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6\,!} = \mathbf{924.}$$

Решение:

74. Сколькими способами можно выбрать из 25 учащихся одного класса пять человек для участия в интеллектуальном марафоне?

$$C_{25}^{5} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5\,!} = \mathbf{53\ 130.}$$

Решение:

75. Сколькими способами можно составить новогодний подарок из трех видов конфет, если всего имеется 15 различных видов?

$$C_{15}^{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3\,!} = \mathbf{455.}$$

Решение:

76. Из класса необходимо выбрать команду из двух человек для участия в районных соревнованиях. Преподаватель сказал, что это можно сделать 190 способами. Сколько человек в классе?

Ответ: 20.

Решение. Число способов, которыми можно выбрать из нескольких человек группу по два человека разными способами, равно Cn2 и составляет 190 способов. По правилу нахождения

$$C_n^{\,2} = \frac{n\,(n\,-1)}{2\,!} = \mathbf{190} \Rightarrow n = \mathbf{20.}$$

Домашнее задание

77. Даны две параллельные прямые. На одной выбрали шесть точек, а на второй восемь. Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Подсчитаем отдельно число треугольников, у которых две вершины лежат на первой прямой и одна на второй, и число треугольников, у которых две вершины лежат на второй прямой и одна на первой:

$C_6^1 \bullet C_8^1 = 15 \bullet 8 = 120$ и $C_6^1 \bullet C_8^2 = 15 \bullet 8 = 168$.

Итого имеем: 120 + 168 = 288 треугольников.

78. Для оформления зала к празднику купили воздушные шарики различных цветов: белые, красные, зеленые, синие, розовые, голубые, фиолетовые, желтые. Сколькими способами можно составить связки по три шарика разного цвета?

Решение: $C_8^{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3\,!} = \mathbf{56.}$

Занятие 6

Тема: Треугольник Паскаля. Бином Ньютона

Ход занятия

Объяснение нового материала

Задача 1. Определить закономерность, по которой составлена данная последовательность чисел:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

…

Согласно найденной закономерности составить еще одну, седьмую, строку.

Решение: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Задача 2. Вычислить: C_4^3 ; C_5^2; C_6^1; C_6^2; C_6^3.

Решение: $C_4^3 = 6$; $C_5^2 = 10$; $C_6^1 = 6$; $C_6^2 = 15$; $C_6^3 = 20$.

Пронумеруем строки треугольника Паскаля, и числа, стоящие на соответствующих местах, кроме первого и последнего. Что вы заметили? Например, числа C_6^1; C_6^2; C_6^3 равны числам, стоящим соответственно на 1-м, 2-м и 3-м местах в шестой строке.

Решение упражнений

С помощью треугольника Паскаля сделайте проверку к домашним задачам.

Объяснение нового материала (продолжение)

Неожиданное применение треугольник Паскаля находит при разложении на множители произвольной степени двучлена (a + b):

$$(a+b)^0 = \mathbf{1}$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + \mathbf{2}ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$$

…

Заметим, что коэффициенты в разложении бинома Ньютона равны числам, стоящим на соответствующих местах треугольника Паскаля.

Пользуясь этим правилом, можно составить формулы для разложения любой степени двучлена.